สาขาวิชาวิทยาการจัดการ
มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช

การสอนเสริมครั้งที่ 1
หน่วยที่ 1 - 5

เอกสารโสตทัศน์ชุดวิชา

คณิตศาสตร์และสถิติ

MATHEMATICS AND STATISTICS

+	−	x	÷
=	≠	∈	∅
σ	χ	θ	β
υ	μ	∫	∞
Σ	$\bar{x}$	$\hat{p}$	$\hat{q}$

α

3 0 2 0 5

เอกสารโสตทัศน์ชุดวิชา คณิตศาสตร์และสถิติ การสอนเสริมครั้งที่ 1

จัดทำขึ้นเพื่อเป็นบริการแก่นักศึกษาในการสอนเสริม

จัดทำต้นฉบับ : คณะกรรมการกลุ่มผลิตชุดวิชา

บรรณาธิการ/ออกแบบ : หน่วยผลิตสื่อสอนเสริม ศูนย์โสตทัศนศึกษา
สำนักเทคโนโลยีการศึกษา

จัดพิมพ์ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช

พิมพ์ที่ : โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช

พิมพ์ครั้งที่ 34 ภาค 2/2558 พิมพ์ซ้ำ

แผนการสอนเสริม
ครั้งที่ 1

ชุดวิชา คณิตศาสตร์และสถิติ

การสอนเสริมครั้งที่ 1 (หน่วยที่ 1 – 5)

ประเด็น

1. ข้อมูลเชิงปริมาณทางธุรกิจ โครงสร้างของคณิตศาสตร์และสถิติ และการประยุกต์
2. เซตและระบบจำนวนจริง
3. เมทริกซ์
4. ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน ลำดับและอนุกรม
5. การดิฟเฟอเรนชิเอตและการอินทิเกรต

แนวคิด

1. ข้อมูลเชิงปริมาณทางธุรกิจ เป็นลักษณะของข้อมูลทางธุรกิจที่เกี่ยวข้องกับตัวเลข จำนวนนับ อันดับ ที่ใช้อธิบายลักษณะของธุรกิจ และธุรกิจสามารถนำลักษณะต่างๆของธุรกิจมาทำการวิเคราะห์คำนวณ เพื่อใช้อธิบายเหตุผลต่างๆ ที่เกิดขึ้นได้
2. เซตเป็นลักษณะการรวมอยู่ของสิ่งต่างๆ ในทางคณิตศาสตร์
3. ระบบจำนวน ประกอบด้วย จำนวนจริงและจำนวนที่ไม่จำนวนจริง
4. เมทริกซ์เป็นกลุ่มของตัวเลขที่เรียงเป็นแถวๆ ละเท่าๆ กัน และเขียนล้อมรอบตัวเลขเหล่านี้ด้วยวงเล็บใหญ่ ชนิดของเมทริกซ์ที่สำคัญ ได้แก่ เมทริกซ์แถว เมทริกซ์สดมภ์ เมทริกซ์ศูนย์ เมทริกซ์จัตุรัส เมทริกซ์เอกลักษณ์ และเมทริกซ์สับเปลี่ยน
5. ดีเทอร์มิแนนต์ เป็นค่าจริงค่าหนึ่งของเมทริกซ์ ความรู้เรื่องดีเทอร์มิแนนต์จะช่วยให้พิจารณาได้ว่าเมทริกซ์จัตุรัสที่กำหนดมีเมทริกซ์ผกผันหรือไม่
6. ความสัมพันธ์ เป็นเซตของคู่อันดับ และเป็นเซตย่อยของผลคูณคาร์ทีเซียน
7. ฟังก์ชัน เป็นการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณตั้งแต่ 2 ปริมาณขึ้นไป
8. ลำดับเป็นฟังก์ชันจากเซตของจำนวนเต็มบวกไปยังจำนวนจริงมี 2 ลักษณะ คือ ลำดับจำกัด และลำดับอนันต์
9. อนุกรม คือ เซตของผลบวกย่อยของลำดับ
10. การดิฟเฟอเรนชิเอต คือ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันใดๆ ที่กำหนดให้ ส่วนการอินทิเกรต คือ การหาอินทริกรัลของฟังก์ชัน

วัตถุประสงค์

เมื่อได้รับการสอนเสริมแล้ว นักศึกษาสามารถ

1. อธิบายข้อมูลเชิงปริมาณทางธุรกิจได้
2. หาผลของการดำเนินงานได้เมื่อกำหนดเซตและการดำเนินการบนเซต
3. หาช่วงของจำนวนจริงที่แสดงด้วยกราฟบนเส้นจำนวนได้

4. หาผลบวกและผลคูณของเมทริกซ์ที่กำหนดให้ได้
5. หาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ที่กำหนดให้ได้
6. หาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จัตุรัสที่กำหนดให้ได้
7. หาผลคูณคาร์ทีเซียนได้
8. หาความสัมพันธ์ระหว่างเซตสองเซตใดๆ ได้
9. หาความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชันได้
10. หาฟังก์ชันผกผันได้
11. หาลำดับและอนุกรมได้
12. หาลิมิต อนุพันธ์และอินทิกรัลของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

กิจกรรมการสอนเสริม

1. อธิบายเนื้อหาตามประเด็นหน่วย 1– 5 (ในแต่ละประเด็นใช้เวลาเฉลี่ย 40 นาที)
2. ให้นักศึกษาที่เข้ารับการสอนเสริมทดลองทำคำถามท้ายประเด็น (ใช้เวลาประมาณหน่วยละ 10 – 20 นาที)

สื่อการสอนเสริม

1. เอกสารการสอนชุดวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ หน่วยที่ 1– 5
2. เอกสารโสตทัศน์
3. คำถามท้ายประเด็น

การประเมินผล

1. สังเกตการณ์การมีส่วนร่วมของนักศึกษา
2. ประเมินผลจากแบบประเมินผลการสอนเสริม

บทที่ 1

ข้อมูลเชิงปริมาณทางธุรกิจ โครงสร้างของคณิตศาสตร์และสถิติ และการประยุกต์

โสตทัศน์ # 1.1 ความหมายของตัวแปร

ความหมายของตัวแปร

ตัวแปร หมายถึง คุณลักษณะที่ใช้อธิบายปรากฏการณ์หรือสภาวการณ์หรือพฤติกรรมใด ๆ เหตุการณ์หรือปรากฏการณ์เหล่านั้นอาจเป็นปรากฏการณ์ที่อาจจะเกี่ยวข้องกับธุรกิจหรือไม่ได้เกี่ยวข้องกับธุรกิจก็เป็นได้ ตัวอย่างของเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้องกับธุรกิจ เช่น การผลิตสินค้าของโรงงาน การส่งเสริมการตลาด การโฆษณา การประชาสัมพันธ์ การบริหารช่องทางการจำหน่ายสินค้า สำหรับเหตุการณ์หรือปรากฏการณ์ที่ไม่ได้เกี่ยวข้องกับธุรกิจ เช่น ภาวการณ์ของการจราจรในกรุงเทพมหานคร สถานภาพทางการเมืองของประเทศไทย

โสตทัศน์ # 1.2 การจำแนกประเภทของตัวแปร

การจำแนกประเภทของตัวแปร

ตัวแปรสามารถจำแนกได้เป็น 2 ประเภท คือ

1. ตัวแปรเชิงคุณภาพ (Qualitative Variable) เป็นตัวแปรที่อธิบายคุณลักษณะของเหตุการณ์หรือภาวการณ์หรือพฤติกรรม หมายความว่า คุณลักษณะต่าง ๆ เหล่านั้นไม่สามารถวัดเป็นมูลค่ามากน้อยได้ ตัวอย่างเช่น คุณลักษณะบ่งบอกประเภทของธุรกิจ ได้แก่ ธุรกิจขนาดย่อม ขนาดกลาง และขนาดใหญ่ คุณลักษณะบ่งบอกพฤติกรรมการบริโภค ได้แก่ ดื่มเป็นประจำ นานๆ ครั้ง ไม่ดื่มเลย

2. ตัวแปรเชิงปริมาณ (Quantitative Variable) เป็นตัวแปรที่อธิบายคุณลักษณะของเหตุการณ์หรือภาวการณ์หรือพฤติกรรมหรือความคิดเห็นเชิงปริมาณ หมายความว่า คุณลักษณะต่าง ๆ เหล่านั้นสามารถวัดเป็นมูลค่ามากน้อยได้ ตัวอย่างเช่น สถานภาพทางการเงินของธุรกิจ ได้แก่ กำไรหักภาษีและดอกเบี้ย งบประมาณการลงทุน สถานภาพทางการตลาดของธุรกิจ ได้แก่ ส่วนครองตลาด งบประมาณการโฆษณา สถานภาพทางการผลิต ได้แก่ กำลังการผลิต จำนวนโรงงาน ตัวแปรเชิงปริมาณสามารถจำแนกออกเป็น 2 ประเภท ดังนี้

2.1 ตัวแปรคงที่ (Fixed Variable) หรืออาจเรียกว่าตัวแปรทางคณิตศาสตร์ เป็นคุณลักษณะของปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นแล้ว และปรากฏให้เห็นคุณลักษณะดังกล่าวอย่างชัดเจนแน่นอน ตัวอย่างเช่น ตัวแปรอธิบายต้นทุนของการผลิต เช่น 1,000 บาทต่อหน่วย จะเป็นข้อมูลต้นทุนคงที่ คงที่ในที่นี้หมายถึง ไม่ความคลาดเคลื่อน (Error) แต่ไม่ได้หมายถึง เป็นข้อมูลเพียงค่าเดียว ข้อมูลสามารถเปลี่ยนแปลงได้ แต่ละค่าเท่านั้นไม่มีความคลาดเคลื่อน

2.2 ตัวแปรสุ่ม ((Random Variable) หรืออาจเรียกว่าตัวแปรทางสถิติ (Statistics Variable) เป็นคุณลักษณะของปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นแล้ว แต่ผลลัพธ์ที่ได้เป็นค่าข้อมูลที่อาจมีหลายค่า ผลลัพธ์ที่เห็นจึงเป็นข้อมูลเพียง 1 ในหลายผลลัพธ์ที่อาจเป็นไปได้ ดังนั้นข้อมูลที่อธิบายคุณลักษณะที่เกิดขึ้น จึงเป็นข้อมูลที่ไม่คงที่ คือ มีความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นของข้อมูล

โสดทัศน์ # 1.3 ความหมายของข้อมูล

ความหมายของข้อมูล

ข้อมูล หมายถึง ค่าตัวเลขเชิงปริมาณ (Quantity) ที่มีมูลค่าความมากน้อยได้ หรือเป็นค่าตัวเลขแทนประเภทหรือคุณลักษณะเชิงคุณภาพ (Quality) ซึ่งไม่สามารถวัดความมากน้อยได้ของตัวแปร

โสดทัศน์ # 1.4 การจำแนกประเภทของข้อมูล

การจำแนกประเภทของข้อมูล

ประเภทของข้อมูลสามารถจำแนกได้เป็นหลายอย่าง เช่น

1. ความต่อเนื่องของข้อมูล แยกเป็น

- ข้อมูลแบบไม่ต่อเนื่อง
- ข้อมูลแบบต่อเนื่อง

2. มาตราของข้อมูล แยกเป็น

- มาตราแบบจำแนกประเภท (Nominal Scale)
- มาตราแบบอันดับ (Ordinal Scale)
- มาตราแบบช่วง (Interval Scale)
- มาตราแบบอัตราส่วน (Ratio Scale)

3. แหล่งที่มาของข้อมูล (Source of Data) แยกเป็น

- ข้อมูลปฐมภูมิ
- ข้อมูลทุติยภูมิ

4. ระยะเวลาของการเก็บรวบรวมข้อมูล

- ข้อมูลตัดขวาง
- ข้อมูลระยะยาว

โสตทัศน์ # 1.4 (ต่อ)

5. **วิธีการได้มาของข้อมูล**
   - ข้อมูลที่ไม่ได้เก็บรวบรวมจากการทดลอง
   - ข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้จากการทดลอง
6. **จำนวนตัวแปร**
   - จำนวนตัวแปร 1 ตัวแปรหรือข้อมูลตัวแปรเดี่ยว
   - จำนวนตัวแปรมากกว่า 1 ตัวแปรหรือข้อมูลตัวแปรพหุ

โสตทัศน์ # 1.5 โครงสร้างข้อมูลตามหลักการทางคณิตศาสตร์และสถิติ

โครงสร้างข้อมูลตามหลักการทางคณิตศาสตร์และสถิติ

โครงสร้างของข้อมูลธุรกิจ ประกอบด้วย 2 ส่วน คือ จำนวนตัวแปรและจำนวนรายการหรือจำนวนหน่วยให้ข้อมูล ซึ่งสามารถเขียนลักษณะโครงสร้างข้อมูลด้วยตาราง 2 ทาง คือ ตารางที่ประกอบด้วยแถว (Row) และสดมภ์ (Column) ตัวอย่างเช่น

รายการที่	ข้อมูลของตัวแปรตัวที่ 1 (X_1)	ข้อมูลของตัวแปรตัวที่ 2 (X_2)	ข้อมูลของตัวแปรตัวที่ p (X_p)
1	X_{11}	X_{12}	X_{1p}
2	X_{21}	X_{22}	X_{2p}
...	...	...	...
...	...	...	...
n	X_{n1}	X_{n2}	X_{np}

โดยที่

X_j เป็นสัญลักษณ์แทนตัวแปรตัวที่ j ; j = 1, 2, ..., p

p เป็นจำนวนตัวแปร

X_{ij} เป็นข้อมูลของตัวแปรที่ j จากรายการที่หรือหน่วยที่ให้ข้อมูลที่ i

โดยที่ i = 1, 2, ..., n ; j = 1, 2, ..., p

n เป็นจำนวนรายการหรือจำนวนหน่วยที่ให้ข้อมูล

โสดทัศน์ # 1.6 เวคเตอร์และเมทริกซ์

เวคเตอร์และเมทริกซ์

ถ้าข้อมูลธุรกิจประกอบด้วย 3 ตัวแปร ได้แก่ ระดับความพึงพอใจในการบริการของพนักงาน ระดับความพึงพอใจในคุณภาพของผลิตภัณฑ์ และระดับความพึงพอใจในสถานที่ที่รับบริการ ซึ่งมาตราของข้อมูลทั้ง 3 ตัวแปรเป็นแบบจัดอันดับ จากน้อยสุด คือ 1 ถึงมากที่สุด คือ 5 สามารถนำมากำหนดเป็นเวคเตอร์และเมทริกซ์ได้ดังนี้

ลูกค้าคนที่	ระดับความพึงพอใจต่อ		
	การบริการของพนักงาน	คุณภาพของผลิตภัณฑ์	สถานที่ที่ให้บริการ
1	4	2	3
2	5	3	4
3	3	3	3
4	4	2	4
5	4	3	4

โสดทัศน์ # 1.6 (ต่อ)

จากตารางสามารถนำมาเขียนเป็นเมทริกซ์ ดังนี้

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

โดยที่ X เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด 5 x 3 หมายถึง 5 แถว 3 สดมภ์ สำหรับจำนวน 5 แถว ของเมทริกซ์แทนข้อมูล 5 รายการหรือคน และจำนวน 3 สดมภ์ของเมทริกซ์แทนจำนวนข้อมูลตัวแปร 3 ตัวแปร อย่างไรก็ตามเมทริกซ์ของข้อมูลสามารถเขียนอยู่ในรูปแบบของสดมภ์เวคเตอร์ได้ ดังนี้ ถ้า X เป็นเมทริกซ์ของข้อมูลขนาด n x p หมายถึง จำนวนรายการ n รายการ และจำนวนตัวแปร p ตัวแปร ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & \dots & X_{1p} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & & X_{2p} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & \dots \dots & X_{3p} \\ \dots & \dots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \dots & \dots \\ X_{n1} & X_{n2} & X_{n3} & \dots \dots & X_{np} \end{bmatrix} = (\tilde{X}_1 \vdots \tilde{X}_2 \vdots \tilde{X}_3 \vdots \dots \quad \dots \vdots \tilde{X}_p)$$

$$\tilde{X}_1 = \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \\ X_{31} \\ \dots \\ \dots \\ X_{n1} \end{bmatrix}, \tilde{X}_2 = \begin{bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \\ X_{32} \\ \dots \\ \dots \\ X_{n2} \end{bmatrix}, \tilde{X}_3 = \begin{bmatrix} X_{13} \\ X_{23} \\ X_{33} \\ \dots \\ \dots \\ X_{n3} \end{bmatrix}, \dots\dots, \tilde{X}_p = \begin{bmatrix} X_{1p} \\ X_{2p} \\ X_{3p} \\ \dots \\ \dots \\ X_{np} \end{bmatrix}$$

โดยที่ $\tilde{x}_j$; j = 1, 2,...,p เป็นสดมภ์เวคเตอร์ขนาด n x 1 ซึ่งเป็นสดมภ์เวคเตอร์แทนข้อมูลของตัวแปรที่ i = 1, 2,...,n ของจำนวนข้อมูล n รายการ

โสตทัศน์ # 1.7 การจำแนกโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ของข้อมูลธุรกิจ

การจำแนกโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ของข้อมูลธุรกิจ สามารถจำแนกเป็น

1. โครงสร้างของข้อมูลตัดขวาง 1 กลุ่ม (Structure of One-group Cross-sectional Data)
2. โครงสร้างของข้อมูลตัดขวางมากกว่า 1 กลุ่ม (Structure of More than 1 group Cross-sectional Data)
3. โครงสร้างของข้อมูลวัดซ้ำ (Structure of Repeated Measures Data)

โสตทัศน์ # 1.8 การวิเคราะห์เชิงปริมาณทางธุรกิจ

การวิเคราะห์เชิงปริมาณทางธุรกิจ

การใช้ข้อมูลเชิงปริมาณสำหรับการวิเคราะห์ธุรกิจสามารถทำได้ 2 แนวทาง ดังนี้

แนวทางที่ 1 ผู้วิเคราะห์จะมองว่าข้อมูลเชิงปริมาณทางธุรกิจ เป็นข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้ของตัวแปรโดยที่ข้อมูลของตัวแปรเหล่านี้เป็นค่าคงที่ คือ ค่าของตัวแปรมีค่าแน่นอน (Certainty) ไม่ได้อธิบายด้วยการแจกแจงความน่าจะเป็น แนวทางนี้เรียกว่า **การวิเคราะห์ของตัวแบบเชิงกำหนด** (Deterministic Model Analysis)

แนวทางที่ 2 ผู้วิเคราะห์จะมองว่าข้อมูลเชิงปริมาณทางธุรกิจ เป็นข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้ของตัวแปรโดยที่ข้อมูลของตัวแปรเหล่านี้เป็นค่าไม่คงที่ คือ ค่าของตัวแปรมีค่าไม่แน่นอน (Uncertainty) และกำหนดให้การแจกแจงความน่าจะเป็น อธิบายความไม่แน่นอนของตัวแปรดังกล่าว แนวทางนี้เรียกว่า **การวิเคราะห์ของตัวแบบเชิงสุ่มหรือเชิงสถิติ** (Stochastic/statistical Model Analysis)

คำถามท้ายประเด็น

1. จงอธิบายความหมาย พร้อมยกตัวอย่างของคำต่อไปนี้
   1.1 ตัวแปร
   1.2 ตัวแปรที่อธิบายเหตุการณ์ทางธุรกิจ
   1.3 ตัวแปรที่อธิบายพฤติกรรมที่เกี่ยวข้องกับธุรกิจ

2. ให้ยกตัวอย่างตัวแปรคงที่และตัวแปรสุ่มมาอย่างละ 3 ตัวอย่าง

3. ให้ยกตัวอย่างข้อมูลเชิงคุณภาพและข้อมูลเชิงปริมาณ

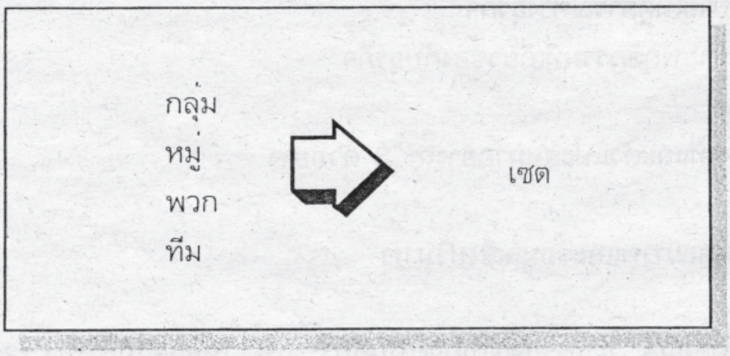
4. การจำแนกประเภทของข้อมูล สามารถจำแนกได้เป็นกี่ประเภท ให้ยกตัวอย่างมา 3 ประเภท

5. ให้ยกตัวอย่างของโครงสร้างข้อมูลของตัวแปรเพียงตัวแปรเดียวประเภทต่าง ๆ ต่อไปนี้ในรูปแบบของเวคเตอร์
   5.1 ข้อมูลตัดขวาง 1 กลุ่ม 1 ระยะเวลา
   5.2 ข้อมูลอนุกรมเวลา
   5.3 ข้อมูลวัดซ้ำ

<u>บทที่ 2</u>

เซตและระบบจำนวนจริง

โสตทัศน์ # 1.9 ความหมายของเซต



ให้ A เป็นเซตของจำนวนนับที่มีค่าน้อยกว่า 5

<u>เขียนด้วยวิธีกำหนดเงื่อนไขของสมาชิก</u>

A = {x / x เป็นจำนวนนับที่มีค่าน้อยกว่า 5}

<u>เขียนด้วยวิธีแจกแจงสมาชิก</u>

A = {1, 2, 3, 4}

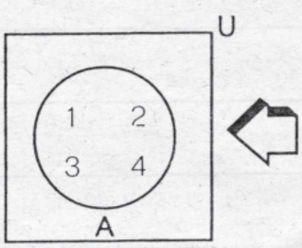
1, 2, 3, 4 เรียกว่าเป็น<u>สมาชิกของเซต</u>

$1 \in A$ อ่านว่า 1 เป็นสมาชิกของเซต A

หรือ 1 อยู่ใน A

$5 \notin A$ อ่านว่า 5 ไม่เป็นสมาชิกของเซต A

หรือ 5 ไม่อยู่ใน A



<u>แผนภาพของเวนน์ – ออยเลอร์</u>

ถ้า A เป็นเซตใดๆ

และ U เป็นเอกภพสัมพันธ์ซึ่ง A เป็นเซตที่ย่อยของ U จะได้ $\{A \subseteq U\}$

เมื่อกล่าวถึงเซตจะต้องกำหนดขอบเขตของเซตที่จะศึกษา เซตที่เป็นขอบเขต เรียกว่า<u>เอกภพสัมพัทธ์</u> (Universal set) ใช้สัญลักษณ์ U

โสตทัศน์ # 1.10 เซตว่าง เซตจำกัด เซตอนันต์

ให้ $A = \{x / x \in I$ และ $X^2 - 2X - 3 = 0\}$

เมื่อ I เป็นเซตของจำนวนเต็ม

จะได้ $A = \{-1, 3\}$

A มีสมาชิก 2 ตัว

ถ้ากำหนด $B = \{x/x \notin I$ และ $0 < X < 1\}$

จะเห็นว่า B **ไม่มีสมาชิก** เพราะไม่มีจำนวนเต็มที่มีค่าระหว่าง 0 กับ 1 เรียก B ว่าเซตว่าง

เซตว่าง (empty set) เป็นเซตที่ไม่มีสมาชิกอยู่เลย กล่าวคือเซตดังกล่าวมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ 0 ตัว เขียนแทนเซตว่างด้วย { } หรือ $\varnothing$

เซตจำกัด (finite set) เป็นเซตที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากับจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์

ให้ $C = \{x/x \in N$ และ x เป็นจำนวนคู่$\}$

จะได้ $C = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

C มีจำนวนสมาชิกไม่จำกัด

ดังนั้นเซต C ไม่ใช่เซตจำกัด เรียก C ว่า เป็นเซตอนันต์

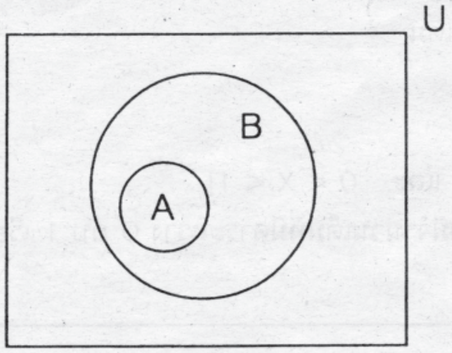
เซตอนันต์ (infinite set) เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด

ตัวอย่างเซตอนันต์

$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$	เซตของจำนวนนับ
$\{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots)$	เซตของจำนวนเต็ม
$\{x / x$ เป็นจำนวนจริง และ $1 < x < 2\}$	เซตของจำนวนจริงที่มีค่าระหว่าง 1 และ 2

โสตทัศน์ # 1.11 สับเซต

สับเซต



A, B เป็นเซตใดๆ

A เป็นสับเซตของ B ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B

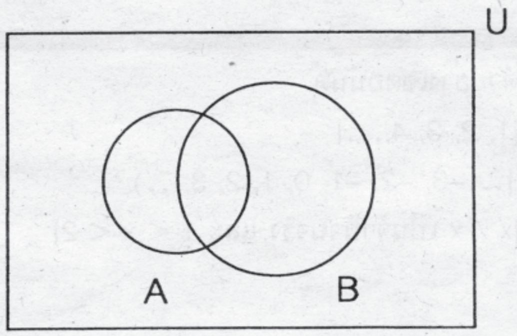
A เป็นสับเซตของ B เขียนแทนด้วย $A \subseteq B$

ถ้า $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$C = \{2, 4, 6\}$

จะได้ C ไม่เป็นสับเซตของ A เขียนแทนด้วย $C \not\subseteq A$ เพราะมีสมาชิกของ C บางตัวไม่เป็นสมาชิกของ A

A ไม่เป็นสับเซตของ B ก็ต่อเมื่อ
มีสมาชิกบางตัวของ A ไม่เป็นสมาชิกของ B
เขียนแทนด้วย $A \not\subseteq B$



โสตทัศน์ # 1.12 การเท่ากันของเซต

การเท่ากันของเซต

ถ้า A และ B เป็นเซตใดๆ A = B ก็ต่อเมื่อ
สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B
และสมาชิกทุกตัวของ B เป็นสมาชิกของ A

ถ้า $A = \{1, 3, 4, 0, 5\}$
$B = \{3, 1, 0, 5, 4, 3\}$
จะได้ $A = B$

โสตทัศน์ # 1.13 สับเซตแท้

สับเซตแท้

ถ้า A และ B เป็นเซตใดๆ A เป็นสับเซตแท้ (proper subset) ของ B ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ และ $A \neq B$

A เป็นเซตย่อยแท้ของ B เขียนแทนด้วย $A \subset B$

__ตัวอย่าง__

ถ้า $A = \{2, 4, 6\}$ และ $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

จะเห็นว่าทุก ๆ สมาชิกของ A เป็นสมาชิกของ B ดังนั้น $A \subseteq B$ และเนื่องจาก $A \neq B$ จะได้ว่า $A \subset B$ ด้วย

โสตทัศน์ # 1.13 (ต่อ)

N เป็นเซตของจำนวนนับ

$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

I เป็นเซตของจำนวนเต็ม

$I = \{, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

I^+ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

$I^+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

ความสัมพันธ์ที่พบคือ

1. $N \subseteq I$, $N \neq I$ ดังนั้น $N \subset I$
2. $I^+ \subseteq I$, $I^+ \neq I$ ดังนั้น $I^+ \subset I$
3. $N \subseteq I^+$

โสตทัศน์ # 1.14 เซตกำลัง

เซตกำลัง

ถ้า A เป็นเซตใดๆ แล้วเซตกำลัง (power set) ของ A คือ เซตของเซตย่อยที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ A เขียนแทนด้วย P(A)

ให้ $A = \{a\}$

ตัวอย่าง

1. เซตย่อยของ A คือ $\varnothing$ และ $\{a\}$

   ดังนั้นเซตกำลังของ $A = \{\varnothing, \{a\}\}$
2. ถ้า $A = \{1, 2, 3\}$

   $P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

   ดังนั้น P(A) มีสมาชิก 8 ตัว

ข้อสังเกต

1. $\varnothing$ เป็นเซตย่อยของทุกเซต
2. P(A) มีสมาชิกอย่างน้อย 1 ตัว

   เช่น $A = \varnothing$

   จำนวนสมาชิกของ $P(A) = 2^n = 2^o = 1$

   $P(A) = \{\varnothing\}$

โสตทัศน์ # 1.15 การดำเนินการของเซต

การดำเนินการของเซต

1. **ยูเนียน** (union)

ถ้า A และ B เป็นเซตใดๆ ยูเนียน (union) ของ A กับ B คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน A หรืออยู่ใน B เขียนแทนด้วย A U B

$A \cup B = \{X \mid X \in A$ หรือ $X \in B\}$

2. **อินเตอร์เซกชัน** (intersection)

ถ้า A และ B เป็นเซตใดๆ อินเตอร์เซกชัน (intersection) ของ A กับ B คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ทั้งใน A และ B เขียนแทนด้วย $A \cap B$

$A \cap B = \{X \mid X \in A$ และ $X \in B\}$

3. **ผลต่าง** (difference)

ถ้า A และ B เป็นเซตใดๆ ผลต่างของ A กับ B คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน A และไม่อยู่ใน B เขียนแทนด้วย A – B

$A - B = \{X \mid X \in A$ และ $X \notin B\}$

โสตทัศน์ # 1.15 (ต่อ)

4. ส่วนเติมเต็ม (complement)

ถ้า U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ $A \subseteq U$ ส่วนเติมเต็มของ A คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน U และไม่อยู่ใน A เขียนแทนด้วย A'

$A' = \{X \mid X \in U$ และ $X \notin A\}$

คำถามท้ายประเด็น

1. เซตในข้อใดไม่ใช่เซตจำกัด
   1. $A = \{x \mid x \in N$ และ $x \leq 10\}$
   2. $B = \{x \mid x \in N$ และ $x < 1\}$
   3. $C = \{x \mid x \in N$ และ x เป็นจำนวนคู่$\}$

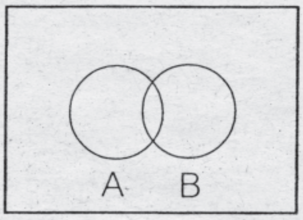
2. ข้อใดไม่ถูกต้อง
   1. $\{x / x$ เป็นจำนวนนับ และ $3 < x < 4\}$ เป็นเซตจำกัด
   2. $\{x / x$ เป็นจำนวนนับ และ $x \leq 100\}$ เป็นเซตจำกัด
   3. $\{x / x$ เป็นจำนวนเต็ม และ $x \leq 100\}$ เป็นเซตจำกัด

3. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   $B = \{1, 3\}$
   $C = \{2, 4, 6\}$

   ข้อใดถูกต้อง
   1. $A \subseteq B$
   2. $B \subseteq A$
   3. $C \subseteq A$

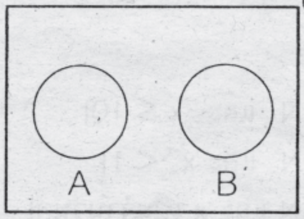
4. ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ พิจารณาแผนภาพของ A และ B แผนภาพในข้อใด แสดงว่า A และ B ไม่มีสมาชิกร่วมกัน

1.



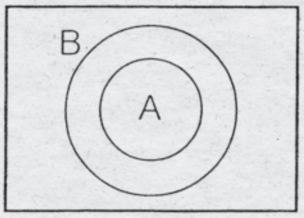
U

2.



U

3.



U

5. ให้ A = {1, 2, 3, 4}
   B = {2, 3, 5}
   C = {4, 6, 7}

   ข้อใดถูกต้อง
   1. $A \cap B = \{2\}$
   2. $A \cap C = \{4\}$
   3. $B \cap C = \{4\}$

6. ให้ A = {1, 2, 3, 4}
   B = {2, 4, 6, 8}
   C = {3, 4}

   ข้อใดถูกต้อง
   1. $A - B = \{1, 3, 6, 8\}$
   2. $B - C = \{2, 6, 8\}$
   3. $A - C = \{1, 2, 4\}$

7. กำหนด $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

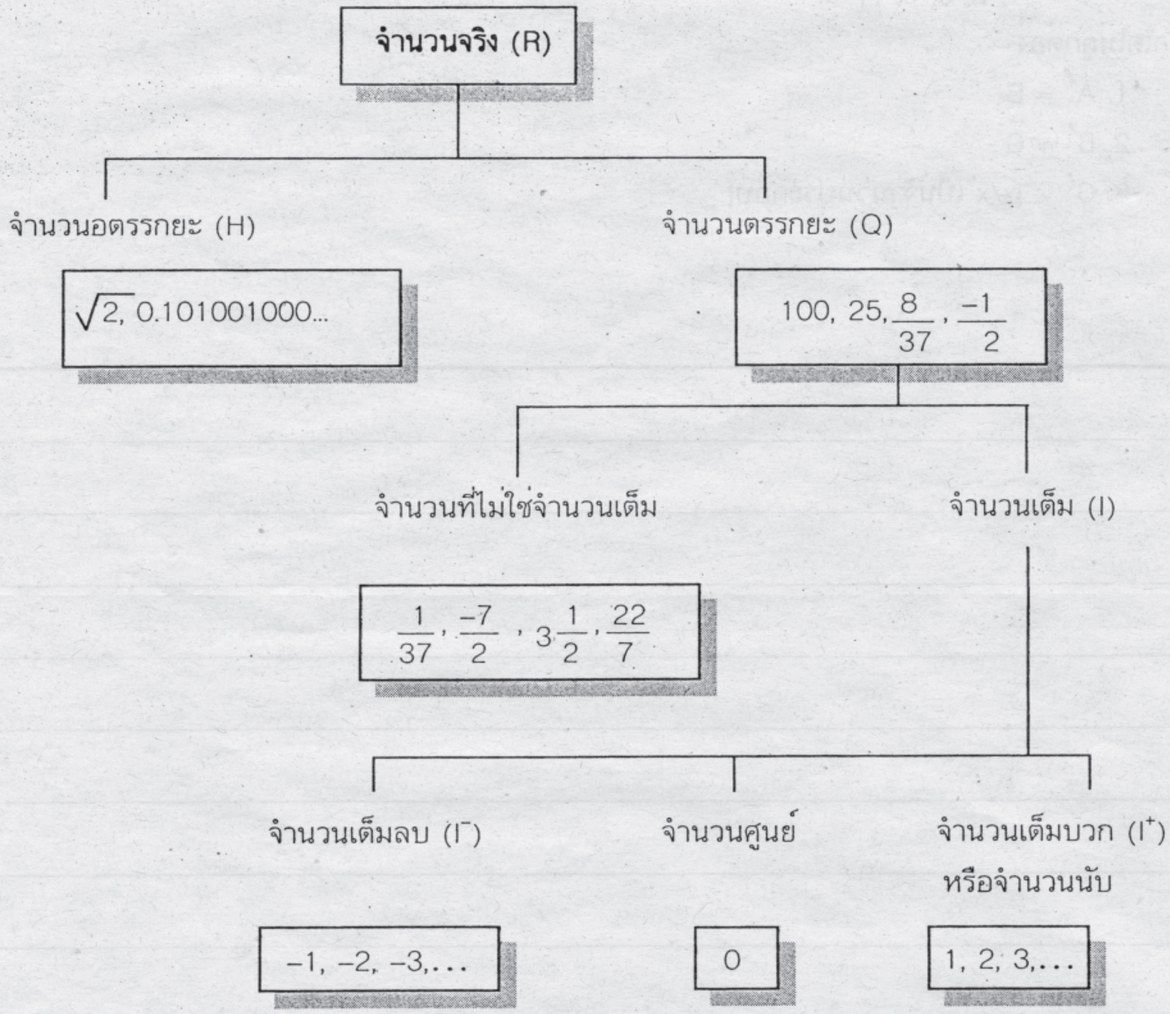
$C = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

ข้อใด<u>ไม่</u>ถูกต้อง

1. $A' = B$
2. $B' = C$
3. $C' = \{x/x$ เป็นจำนวนประกอบ$\}$

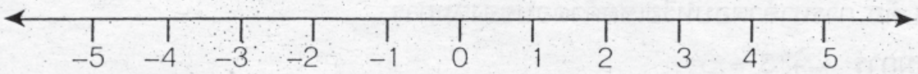
โสดทัศน์ # 1.16 ระบบจำนวน

ระบบจำนวน



โสตทัศน์ # 1.17 เส้นจำนวน

เส้นจำนวน (number line)



จำนวนจริงทุกจำนวนสามารถแทนได้ด้วยจุดบนเส้นจำนวน

สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ ตำแหน่งของ x บนเส้นจำนวนจะเป็นดังนี้

ถ้า $x > 0$ x จะอยู่ทางขวาของ 0

ถ้า $x < 0$ x จะอยู่ทางซ้ายของ 0

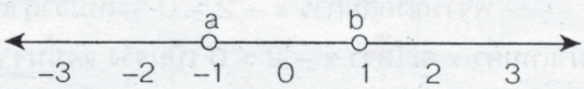
ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงที่ $a < b$ a จะมีตำแหน่งอยู่ทางซ้ายของ b บนเส้นจำนวน

โสตทัศน์ # 1.18 ช่วง

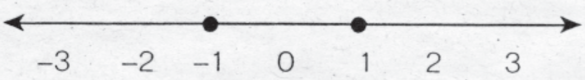
ช่วง (interval) เป็นเซตยอยของเซตของจำนวนจริง แสดงได้ด้วยกราฟบนเส้นจำนวนดังนี้

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงที่ $a < b$

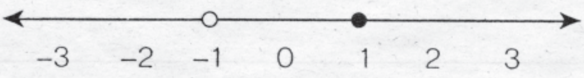
1. $\{x \in R \mid a < x < b\} = (a, b)$
   อ่านว่า ช่วงเปิดจาก a ถึง b



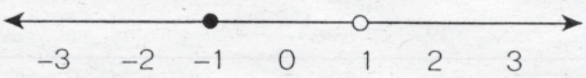
2. $\{x \in R \mid a \le x \le b\} = [a, b]$
   อ่านว่า ช่วงปิดจาก a ถึง b



3. $\{x \in R \mid a < x \le b\} = (a, b]$
   อ่านว่า ช่วงเปิด–ปิดจาก a ถึง b



4. $\{x \in R \mid a \le x < b\} = [a, b)$
   อ่านว่า ช่วงปิด–เปิดจาก a ถึง b



ถ้ากราฟ<u>รวม</u>จุดปลายใช้จุด<u>ทึบ</u> ถ้ากราฟ<u>ไม่รวม</u>จุดปลาย ใช้จุดโปร่ง

โสตทัศน์ # 1.19 สมการ

สมการ

การแก้สมการ คือ การหาคำตอบหรือเซตคำตอบของสมการ

จากสมการ $x + 3 = 5$

เมื่อแทนค่า $x = 2$ จะทำให้สมการเป็นจริง กล่าวคือ $2 + 3 = 5$ เป็นจริง

เราเรียกจำนวนจริงที่เมื่อนำไปแทนค่าของตัวแปรในสมการแล้วทำให้สมการเป็นจริงว่า คำตอบของสมการ จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นได้ว่า $x = 2$ เป็นคำตอบของสมการ ถ้านำมาเขียนเป็นเซตจะเรียกว่า เซตคำตอบ หรือ เซตคำตอบของสมการ นั้นคือ $\{2\}$ เป็นเซตคำตอบของสมการ $x + 3 = 5$

โสตทัศน์ # 1.20 อสมการ

อสมการ

อสมการเป็นประโยคหรือข้อความที่มีตัวแปรและเครื่องหมายแสดงการไม่เท่ากันของจำนวน

เราเรียกจำนวนจริงที่แทนตัวแปรในอสมการ แล้วทำให้อสมการเป็นจริงว่า คำตอบของอสมการ เรียกเซตของจำนวนทุกๆจำนวนที่เป็นคำตอบของอสมการวา เซตคำตอบ

พิจารณาอสมการ $x - 2 > 0$ จะเห็นว่าถ้าเรานำจำนวนจริงใดๆ ที่มีค่ามากกว่า 2 มาแทนค่า x จะได้ว่า $x - 2 > 0$ เป็นจริง ดังนั้นจำนวนจริง x ใดๆที่ $x > 2$ สอดคล้องกับอสมการ แสดงว่า เซตคำตอบของอสมการ $x - 2 > 0$ คือ $\{X \in R \mid x > 2\}$ หรือ $(2,\infty)$

โสดทัศน์ # 1.21 ค่าสัมบูรณ์

ค่าสัมบูรณ์

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง a เขียนแทนด้วย a โดยที่

$$|a| = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a \geq 0 \\ -a & \text{เมื่อ } a < 0 \end{cases}$$

เช่น $|5| = 5$

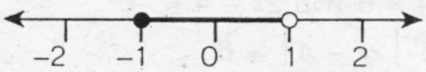
$|0| = 0$

$|-3| = -(-3) = 3$

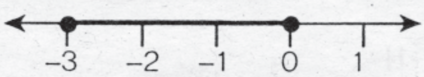
คำถามท้ายประเด็น

1. กราฟของช่วงข้อใดถูกต้อง

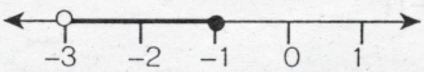
1. (−1, 1)



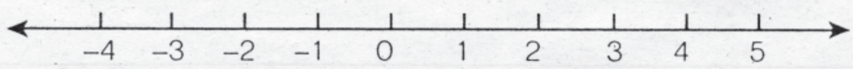
2. [−3, 0)



3. (−3, −1]



2.



$(-\infty, 2) \cap [-1, \infty)$ เท่ากับเซตในข้อใด

1. [−1, 2)
2. (−∞, −1)
3. (2, ∞)

ลองเขียนกราฟ
บนเส้นจำนวนดู

โสดทัศน์ # 1.21 (ต่อ)

3. จงพิจารณาว่า 0 เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุดของเซตใด
   1. $(-2, 0)$
   2. $(0, 2)$
   3. $(2, 4, 6, 8)$

4. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $3x-7 < 5$
   1. $\{x \in R/x < 2/3\}$
   2. $\{x \in R/x < 4\}$
   3. $\{x \in R/x < 12\}$

5. จงหาเซตคำตอบของ $|x| = 6$
   1. $\{6\}$
   2. $\{-6\}$
   3. $\{6, -6\}$

6. จากสมการ $|2x - 4| = 6$

   ตามความหมายของค่าสัมบูรณ์จะได้ว่า

   $2x - 4 = 6$ หรือ $2x - 4 = -6$

   จงหาเซตคำตอบของ $|2x - 4| = 6$
   1. $\{5\}$
   2. $\{7, -1\}$
   3. $\{5, -1\}$

บทที่ 3
เมทริกซ์

โสตทัศน์ # 1.22 ความหมาย มิติ และการเท่ากันของเมทริกซ์

เมทริกซ์ เป็นกลุ่มของตัวเลขที่เรียงเป็นแถวๆ ละเท่าๆ กัน และเขียนล้อมรอบด้วยวงเล็บใหญ่

มิติหรือขนาดของเมทริกซ์

$$\begin{array}{cccc} \text{สดมภ์ที่ 1} & \text{สดมภ์ที่ 2} & \text{สดมภ์ที่ 3} & \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{bmatrix} 7 & 5 & 9 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{แถวที่ 1} \\ \text{แถวที่ 2} \end{array}$$

สมาชิกมี 2 แถว และ 3 สดมภ์
กล่าวว่าเป็นเมทริกซ์มีมิติเท่ากับ 2 x 3

ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ & & \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

เขียนสั้นๆ เป็น $A = (a_{ij})_{m \times n}$

A มีมิติ m x n
มี m แถว และ n หลัก

โสตทัศน์ # 1.22 (ต่อ)

การเท่ากันของเมทริกซ์

เมทริกซ์สองเมทริกซ์ใดๆ เท่ากัน ก็ต่อเมื่อ

1. เมทริกซ์ทั้งสองมีมิติเท่ากัน
2. สมาชิกในตำแหน่งเดียวกันต้องเท่ากัน

เช่น จงหาค่า x , y จากเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & x & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \times 2 & \frac{5}{5} \\ y & \frac{1}{2} & 3^2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $x = \frac{1}{2}$

$y = 3$

โสตทัศน์ # 1.23 ชนิดของเมทริกซ์

ชนิดของเมทริกซ์

<u>เมทริกซ์แถว</u> มีสมาชิกเพียงแถวเดียว เช่น

[3 4]

[1 3 0 –2]

<u>เมทริกซ์สดมภ์</u> มีสมาชิกเพียงสดมภ์เดียว เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

โสตทัศน์ # 1.23 (ต่อ)

เมทริกซ์ศูนย์ สมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ เช่น

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์จัตุรัส เป็นเมทริกซ์ที่มีจำนวนแถว และจำนวนสดมภ์เท่ากัน เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์เอกลักษณ์

เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกเป็นศูนย์หมด ยกเว้นสมาชิกตามแนวเส้นทแยงมุมหลักมีค่าเป็น 1ทุกตัว เมทริกซ์เอกลักษณ์ที่มีมิติ n x n เขียนแทนด้วย I_n

เช่น $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์สับเปลี่ยน

เมทริกซ์สับเปลี่ยนของ A เขียนแทนด้วย A^t

เป็นเมทริกซ์ที่สร้างจาก A โดยเอาสมาชิกในแถวแต่ละแถวของ A มาเป็นสมาชิกในแต่ละสดมภ์ของ A^t เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A_t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

การบวกและการลบเมทริกซ์

- บวกลบกันได้เมื่อเป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเท่ากัน
- บวกลบสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน

ถ้า $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+1 & 3+0 & 4+2 \\ 1+3 & 0+1 & 1+5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

เราไม่สามารถหาผลบวกของ A กับ C เนื่องจาก A กับ C มีมิติไม่เท่ากัน

โสตทัศน์ # 1.24 (ต่อ)

การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์

เราเรียกจำนวนจริงใดๆ ที่นำมาคูณเมทริกซ์ว่า สเกลาร์

การนำจำนวนจริงใดๆ มาคูณกับเมทริกซ์จะต้องคูณกับสมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์นั้น

ถ้า $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

จะได้ $3A = \begin{bmatrix} 3 \times 2 & 3 \times 1 & 3 \times 5 \\ 3 \times 0 & 3 \times 2 & 3 \times 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6 & 3 & 15 \\ 0 & 6 & 12 \end{bmatrix}$

การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

ถ้าเมทริกซ์ A มีมิติ m x n

เมทริกซ์ B มีมิติ n x p

ผลคูณของเมทริกซ์ A ด้วย เมทริกซ์ B

เขียนแทนด้วย AB มีมิติ m x p

$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} \text{ก} & \text{ข} & \text{ค} \\ \text{ง} & \text{จ} & \text{ฉ} \\ \text{ช} & \text{ซ} & \text{ฌ} \end{bmatrix}$

A มีมิติ 2 x 3 และ B มีมิติ 3 x 3

จะได้ AB มีมิติ 2 x 3

ผลคูณของเมทริกซ์

ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ใดๆ เราจะสามารถหาผลคูณระหว่างเมทริกซ์ A กับเมทริกซ์ B ได้ก็ต่อเมื่อจำนวนสดมภ์ของเมทริกซ์ A เท่ากับจำนวนแถวของเมทริกซ์ B และถ้า C เป็นผลคูณระหว่าง A กับ B โดยที่ A เป็น m x n เมทริกซ์และ B เป็น n x p เมทริกซ์ จะได้ว่า C เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเท่ากับ m x p

โสตทัศน์ # 1.24(ต่อ)

<u>ตัวอย่าง</u>

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}5\\7\end{matrix}} & \begin{matrix}6\\8\end{matrix} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} (1 \times 5) + (2 \times 7) & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

C_{11} หมายถึง การคูณสมาชิกแถวที่ 1 ของเมทริกซ์ตัวตั้งกับสดมภ์ที่ 1 ของเมทริกซ์ตัวคูณแล้วนำมาบวกกันดังนี้

$$\begin{aligned} C_{11} &= (1 \times 5) + (2 \times 7) \\ &= 5 + 14 \\ &= 19 \end{aligned}$$

โสตทัศน์ # 1.25 การดำเนินการเปลี่ยนแถวและเมทริกซ์ผกผัน

1. การดำเนินการเปลี่ยนแถว

หมายถึงการดำเนินการกับเมทริกซ์หนึ่ง อย่างใดอย่างหนึ่งต่อไปนี้

1. การสลับที่ระหว่างสองแถว ($R_i \longleftrightarrow R_j$)
2. การคูณแถวใดแถวหนึ่งด้วยจำนวนจริง k ซึ่ง $k \neq 0$ (kR_i)
3. การคูณแถวใดแถวหนึ่งด้วยจำนวนจริง k แล้วนำไปบวกกับอีกแถวหนึ่ง ($kR_j + R_i$ โดยที่ $i \neq j$)

เมทริกซ์ A สมมูลแบบแถวกับเมทริกซ์ B ก็ต่อเมื่อ B เกิดจากการใช้การดำเนินการเปลี่ยนแถวกับ A หนึ่งครั้งหรือสองครั้งก็ได้

A สมมูลแบบแถวกับ B เขียนแทนด้วย $A \overset{r}{\sim} B$

<u>ตัวอย่าง</u>

1. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ จงหา $A \underset{R_1 \rightarrow R_1}{\overset{r}{\sim}} B$ และ $A \underset{2R_2}{\overset{r}{\sim}} B$

เมื่อสลับที่ระหว่างแถวที่ 1 กับแถวที่ 2 ($R_1 \longleftrightarrow R_2$) จะได้

$$\boxed{B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}}$$

นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \underset{R_1 \longleftrightarrow R_2}{\overset{r}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

เขียนสั้นๆ ว่า $A \underset{R_1 \longleftrightarrow R_2}{\overset{r}{\sim}} B$

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

เมื่อนำ 2 ไปคูณทุกสมาชิกในแถวที่ 2 ($2R_2$) จะได้

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

โสตทัศน์ # 1.25 (ต่อ)

นั้นคือ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \underset{2R_2}{\overset{r}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

เขียนสั้นๆ ว่า $A \underset{2R_2}{\overset{r}{\sim}} B$

2. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ จงหา $A \underset{-4R_1 + R_2}{\overset{r}{\sim}} R$

เมื่อคูณสมาชิกในแถวที่ 1 ด้วย –4
แล้วนำไปบวกกับแถวที่ 2 $(-4R_1 + R_2)$ จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ (-4 \times 1) + 4 & (-4 \times 2) + 5 & (-4 \times 3) + 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

นั้นคือ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \underset{-4R_1 + R_2}{\overset{r}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

โสตทัศน์ # 1.25 (ต่อ)

เมทริกซ์ผกผัน

ถ้าเมทริกซ์ A และ B มีมิติ n x n

B จะเป็นเมทริกซ์ผกผันของ A เขียนแทนด้วย $B = A^{-1}$

ก็ต่อเมื่อ $AB = I_n = BA$ และกล่าวได้ว่า A เป็นเมทริกซ์ผกผันของ B เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & -3+3 \\ 4-4 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ผกผันของ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ เพราะคูณกันได้เท่ากับเมทริกซ์เอกลักษณ์

ทำนองเดียวกับ $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & 12-12 \\ -1+1 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ จึงเป็นเมทริกซ์ผกผันของ $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ เพราะคูณกันได้เท่ากับเมทริกซ์เอกลักษณ์

ดังนั้น $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ผกผันซึ่งกันและกัน

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ $ad - bc \neq 0$

เราสามารถหาเมทริกซ์ผกผันของ A ได้จากสูตร

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

โสตทัศน์ # 1.25 (ต่อ)

จากตัวอย่าง สามารถตรวจสอบจากการใช้สูตร $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ได้ดังนี้

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ผกผันของ A

จากเมทริกซ์ A จะเห็นว่า a = 1, b = 3, c = 1, d = 4

$$A^{-1} = \frac{1}{(1)(4)-(1)(3)}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4-3}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A

โสตทัศน์ # 1.26 ดีเทอร์มิแนนต์

ดีเทอร์มิแนนต์

สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส $A = [a_{ij}]_{n \times n}$
เราสามารถหาค่าจริงค่าหนึ่งจากเมทริกซ์ A ได้
เรียกว่า ดีเทอร์มิแนนต์ A เขียนแทนด้วย det A หรือ $|A|$

1. ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์มิติ 1x1

ถ้า $A = [a]$
กำหนด $|A| = a$

เช่น ถ้า $A = [4]$
จะได้ $|A| = 4$

โสตทัศน์ #1.26 (ต่อ)

2. ดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกมิติ 2 x 2

ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

กำหนด

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\ a_{22} - a_{21}\ a_{12}$$

3. ดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์มิติ 3 x 3

ถ้า

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

กำหนด

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}\ a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

โสตทัศน์ #1.26 (ต่อ)

ถ้า A มีมิติ 3 x 3 มีวิธีหา $|A|$ ง่ายๆ โดยการเติมสมาชิกหลักที่ 1 และ 2 ต่อท้ายหลักที่ 3 แล้วใช้การคูณทแยงดังนี้

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & - & - & - \\
\left|\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{matrix}\right. & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix} & \left.\begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{matrix}\right| & \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{matrix} & \left.\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix}\right| \\
 & & + & + & +
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
= {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
- {} & a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}
\end{aligned}
$$

โสดทัศน์ # 1.27 การแก้ระบบการเชิงเส้นโดยใช้เมตริกซ์

การแก้ระบบการเชิงเส้นโดยใช้เมตริกซ์

พิจารณาระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 2x + 3y &= 9 \end{aligned}$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

เราทราบว่าเมตริกซ์ผกผันของ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ คือ $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

เมื่อคูณทั้งสองข้างของสมการด้วย $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

จะได้ผลลัพธ์อย่างไร

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $x = 3$ และ $y = 1$ เป็นคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

โสตทัศน์ # 1.28 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์

จากระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

ถ้า $|A| \neq 0$ จะได้ $X_i = \dfrac{|A_i|}{|A|}$ โดยที่ $i = 1, 2, \dots, n$

ถ้า A_i หมายถึง เมตริกซ์ที่ได้จาก A โดยการแทนสดมภ์ที่ i ด้วย B
กฎนี้เรียกว่า <u>กฎของคราเมอร์</u> (Cramer's rule)

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 0 \\ x - y + 5z &= 0 \\ y - z &= 4 \end{aligned}$$

<u>วิธีทำ</u>

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

โสตทัศน์ # 1.28 (ต่อ)

$$\left|A_1\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 24$$

$$\left|A_2\right| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -36$$

$$\left|A_3\right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -12$$

ดังนั้นโดยกฎของคราเมอร์จะได้ว่า $X = \dfrac{\left|A_1\right|}{\left|A\right|} = \dfrac{24}{-6} = -4$

$$Y = \frac{\left|A_2\right|}{\left|A\right|} = \frac{-36}{-6} = 6$$

$$Z = \frac{\left|A_3\right|}{\left|A\right|} = \frac{-12}{-6} = 2$$

นั่นคือ $X = -4$, $Y = 6$ และ $Z = 2$ เป็นคำตอบของระบบสมการ

คำถามท้ายประเด็น

1) ให้ $A = \begin{bmatrix} x & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 3 & x+y \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

ถ้า A = B จงหาค่า x, y

2) ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

จงหาค่า A–B และ B–A

3) ถ้า

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ จงหาค่า –7A

4) ถ้า

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$

ก. A x B มีมิติเท่าใด

ข. B x A มีมิติขนาดเท่าใด

5) ถ้า

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ และ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ก. จงหา AI_3

ข. จงหา I_3A

6) ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ ab – bc = 0 จงหา A – 1

บทที่ 4
ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน ลำดับ และอนุกรม

โสตทัศน์ # 1.29 ผลคูณคาร์ทีเซียน

ถ้าให้ A, B เป็นเซตใด ๆ สองเซต ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A กับ B คือ เซตของคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมด โดยที่ a เป็นสมาชิกของ A และ b เป็นสมาชิกของ B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \{1, 2\}$

$B = \{1, 2, 3\}$

จงหาค่า $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$ และ $B \times B$

วิธีทำ การหาผลคูณคาร์ทีเซียน คือ เขียนเซตของคู่อันดับทั้งหมดที่เกิดจากการจับคู่ของสมาชิก

$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

$B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$

$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

$B \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

โสตทัศน์ # 1.30 ความสัมพันธ์

A, B เป็นเซตใด ๆ ความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B คือ เซตของคู่อันดับซึ่งเป็นสับเซตของ A x B นั่นคือ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ต่อเมื่อ r เป็นเซตย่อยของ A x B เท่านั้น

ตัวอย่าง กำหนดให้ A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {3, 6} จงหาความสัมพันธ์ต่อไปนี้

วิธีทำ (1) ความสัมพันธ์จาก A ไป B ที่มีความหมายว่า น้อยกว่าอยู่ 1

$r_1 = \{(2, 3), (5, 6)\}$

(2) ความสัมพันธ์ใน A ที่มีความหมายว่า เท่ากัน

$r_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$

(3) ความสัมพันธ์ใน A ที่มีความหมายว่า ต่างกันอยู่ 2

$r_3 = \{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 5), (4, 2), (5, 3)\}$

โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

โดเมน(domain) ของความสัมพันธ์ r ซึ่งเป็นสับเซตของ A x B คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทั้งหมดใน r ส่วนเรนจ์ (range) ของความสัมพันธ์ r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งหมดใน r

$D_r = \{ x \mid (x, y) \in r\}$ แทนโดเมนของ r

$R_r = \{ y \mid (x, y) \in r\}$ แทนเรนจ์ของ r

ถ้า $r \in A \times B$ จะได้ว่า $D_r \subseteq A$, $R_r \subseteq B$

ตัวอย่าง กำหนดให้ A = {1, 2, 3}, B = {1, 3}

$r_1 = \{(1, 1),(3, 1), (2, 3)\}$

$r_2 = \{(1, 3),(2, 1), (3, 3)\}$

จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ r_1, r_2

วิธีทำ (1) $r_1 = \{(1, 1),(3, 1), (2, 3)\}$

$D_{r1} = \{1, 2, 3\}$

$R_{r1} = \{1, 3\}$

(2) $r_2 = \{(1, 3),(2, 1), (3, 3)\}$

$D_{r2} = \{1, 2, 3\}$

$R_{r2} = \{3\}$

โสตทัศน์ # 1.30 (ต่อ)

ความสัมพันธ์ผกผัน

สำหรับความสัมพันธ์ r ถ้าเราสลับที่ของสมาชิกตัวหน้ากับสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับของความสัมพันธ์ r เราจะได้ความสัมพันธ์ใหม่ที่เรียกว่า ความสัมพันธ์ผกผัน (inverse relation) ของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย r^{-1} เช่น

$$r = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$$
$$r^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$$

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ความสัมพันธ์ผกผันของ r คือ ความสัมพันธ์จาก B ไป A เป็นเซตซึ่งประกอบด้วยคู่อันดับ (y, x) ที่ได้มาจากคู่อันดับ (x, y) ทั้งหมดใน r

$$r^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in r\}$$

<u>**ตัวอย่าง**</u> กำหนดให้ U D_r และ $r = \{(x, y) \in U \times U \mid x + y \leq 4\}$
จงหา r^{-1} D_r R_r $D_{r^{-1}}$ $R_{r^{-1}}$

<u>**วิธีทำ**</u> จาก $r = \{(x, y) \in U \times U \mid x + y \leq 4\}$

$= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$

ดังนั้น $r^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3)\}$

$D_r = \{1, 2, 3\}$ และ $R_r = \{1, 2, 3\}$

$D_{r^{-1}} = \{1, 2, 3\}$ และ $R_{r^{-1}} = \{1, 2, 3\}$

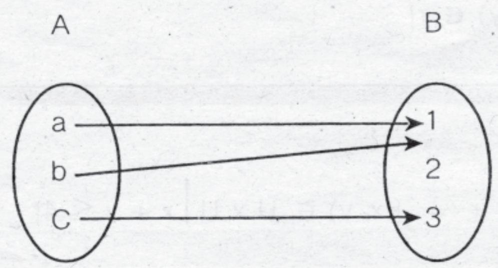
โสตทัศน์ # 1.3 ฟังก์ชัน

ฟังก์ชัน (function) คือ ความสัมพันธ์ซึ่งคู่อันดับสองคู่ใด ๆ ที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้วสมาชิกตัวหลังต้องเหมือนกันด้วย กล่าวคือ f เป็นฟังก์ชันต่อเมื่อ (x, y) และ $(x, z) \in f$ แล้ว $y = z$ เท่านั้น

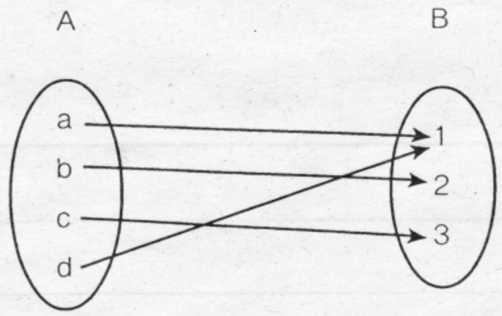
การจับคู่แบบต่าง ๆ ของฟังก์ชัน

การจับคู่แบบต่าง ๆ ของฟังก์ชัน สามารถแบ่งได้เป็น 4 แบบ ดังนี้

แบบ ก. f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B (one to one function from A into B) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f : A \rightarrow B$ หมายถึง ฟังก์ชันที่สมาชิกแต่ละตัวใน A จับคู่กับสมาชิกใน B แบบตัวต่อตัว ฟังก์ชันแบบนี้จะมี $D_f = A$ และ $R_f \subset B$

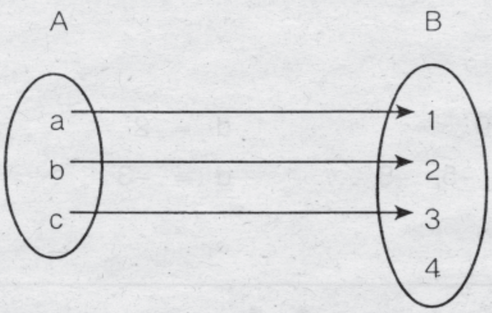


แบบ ข. f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B แบบ Many to one คือสมาชิกใน A หลายตัวจับคู่กับสมาชิกใน B ตัวเดียว แต่เนื่องจาก A ไปทั่วถึง B จึงใช้สมาชิกในเซต B ทุกตัว ฟังก์ชันแบบนี้มี $D_f = A$ และ $R_f = B$

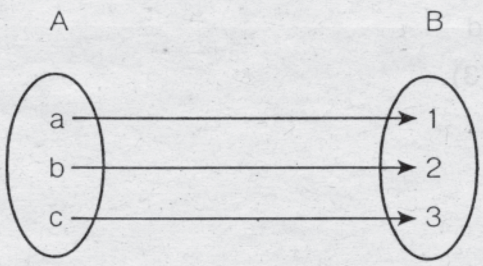


โสตทัศน์ # 1.31 (ต่อ)

แบบ ค. f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B คือสมาชิกใน A จับคู่กับสมาชิกใน B แบบหนึ่งต่อหนึ่ง แต่เนื่องจาก A ไป B (ไม่ทั่วถึง) จึงใช้สมาชิกในเซต B ไม่หมด ฟังก์ชันแบบนี้จะมี $D_f = A$ และ $R_f \subset B$



แบบ ง. f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B(one to one function from A into B, one to one correspondence) $f : A \rightarrow B$ หมายถึง ฟังก์ชันที่สมาชิกแต่ละตัวใน A จับคู่กับสมาชิกใน B แบบตัวต่อตัวโดยสมาชิกใน B ถูกใช้ทุกตัว ฟังก์ชันแบบนี้จะมี $D_f = A$ และ $R_f = B$



ฟังก์ชันผกผัน

เนื่องจากฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ใด ๆ ให้ สามารถหาความสัมพันธ์ผกผันของความสัมพันธ์ได้ ซึ่งความสัมพันธ์ผกผันของ f อาจจะเป็นฟังก์ชันหรือไม่เป็นฟังก์ชันก็ได้ เขียนแทนด้วย f^{-1}

<u>ตัวอย่าง</u> (1) ให้ $f = \{(-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2)\}$

$f^{-1} = \{(-1, -2), (0, -1), (1, 0), (1, 2)\}$

ซึ่งทั้ง f และ f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

(2) ให้ $f = \{(0, 1), (1, 3), (2, 3)\}$

$f^{-1} = \{(1, 0), (3, 1), (3, 2)\}$

f เป็นฟังก์ชัน แต่ f^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน

<u>ข้อสังเกต</u> 1. f จะมีฟังก์ชันผกผันก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งเท่านั้น

2. ถ้า f เป็นฟังก์ชันแล้ว f^{-1} จะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งด้วย

โสตทัศน์ # 1.32 ลำดับและอนุกรม

ลำดับเลขคณิต

ลำดับเลขคณิต คือ ลำดับที่มีผลต่างซึ่งได้จากพจน์ที่ n + 1 ลบด้วยพจน์ที่ n มีค่าคงตัวสำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ ค่าคงตัวนี้เรียกว่า *ผลต่างร่วม*

$a_{n+1} - a_n = d$ เรียก d ว่าผลต่างร่วม

ตัวอย่าง (1) 3, 5, 7, 9 $\quad d = 2$

(2) 4, 1, −2, −5, −8, ... $\quad d = -3$

> พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$

ตัวอย่าง จงหาพจน์ที่ 5 ของเลขต่อไปนี้ 2, 5, 8, 11,...

วิธีทำ

$$a_1 = 2, d = 5 - 2 = 3$$

$$a_5 = a_1 + 4d$$

$$= 2 + 4(3)$$

$$= 14$$

ลำดับเรขาคณิต

ลำดับเรขาคณิต คือ ลำดับที่อัตราส่วนของพจน์ที่ n + 1 ต่อพจน์ที่ n มีค่าคงตัว สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ ค่าคงตัวนี้นี้เรียกว่า *อัตราส่วนร่วม (common ratio)*

$\frac{a_{n+1}}{a_n}$ หรือ $a_{n+1} = a_n r$ เรียก r ว่าอัตราส่วนร่วม

ตัวอย่าง (1) 2, 6, 18, 54,... $\quad r = 3 \; (\frac{6}{2})$

(2) $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots \quad r = \frac{1}{2} \; (\frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2})$

> การหาพจน์ทั่วไปหรือพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต
>
> $a_n = a_1 r^{n-1}$

โสดทัศน์ # 1.32 (ต่อ)

ตัวอย่าง จงหาพจน์ที่ 6 และพจน์ที่ 10 ของลำดับ 16, 8, 4, 2,...

ในที่นี้ $a_1 = 16,\ r = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{16}\right)$

(1) $a_6 = a_1 r^{(6-1)}$

$= 16\left(\frac{1}{2}\right)^5$

$= \frac{1}{2}$

(2) $a_{10} = a_1 r^{(10-1)}$

$= 16\left(\frac{1}{2}\right)^9$

$= \frac{1}{32}$

อนุกรมเลขคณิต

ผลรวม n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1+(n+1)d)$$

หรือ $$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

ตัวอย่าง จงหาผลบวกของจำนวนนับจาก 1 ถึง 20 ว่ามีค่าเป็นเท่าใด

วิธีทำ ผลบวกของ $1 + 2 + 3 + \ldots + 20$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต

มีพจน์แรก $a_1 = 1$ พจน์สุดท้าย $a_n = 20$ $d = 1$ และ $n = 20$

จากสูตร $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$S_{20} = \frac{20}{2}(1 + 20)$

$= 10 \times 21$

$= 210$

โสตทัศน์ # 1.32 (ต่อ)

อนุกรมเรขาคณิต

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \text{เมื่อ } r \neq 1$$

ตัวอย่าง จงหาผลบวก 10 พจน์แรกของ 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$,...

วิธีทำ อนุกรมที่กำหนดให้ $a = 4$ และ $r = \frac{1}{2}$

จากสูตร $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

ดังนั้น $S_{10} = \dfrac{4\,(1-(1/2)^9)}{1-(1/2)}$

$= 8 - 8\,(1/2)^9$

$= 8 - \dfrac{1}{64}$

$= \dfrac{511}{64}$

คำถามท้ายประเด็น

1. กำหนดให้ A = {2, 4, 6, 8} และ B = {3, 5, 7} จงหาผลคูณคาร์ทีเซียนของ
   A x B, B x A, A x A, B x B

2. กำหนดให้ A = {1, 2, 3, 4} และ B = {1, 3, 5} และให้ r แทนความสัมพันธ์ **น้อยกว่า** จาก A ไปยัง B จงหา
   ก. r ในรูปแจกแจง
   ข. r^{-1} ในรูปแจกแจง

3. จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่ โดยแสดงวิธีทำด้วย
   ก. $y^2 + 5 = x$
   ข. $x^2 + 5 = y$

5. จงหาพจน์ที่ 20 ของ 3, 5, 7, 9,...

6. จงหาผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต 1, 2, 4, 8, 16,...

บทที่ 5

การดิฟเฟอเรนซิเอตและการอินทริเกรด

โสตทัศน์ # 1.33 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

การหาลิมิตของฟังก์ชันใดๆ ก็คือ การหาค่าของฟังก์ชันนั้นว่าเข้าใกล้ค่าอะไร เมื่อตัวแปรแปรค่าเข้าใกล้ค่าที่กำหนดให้

ทฤษฎีของลิมิต ให้ c, n, k, A, B เป็นจำนวนจริงใดๆ

ทฤษฎีบท 1

$$\boxed{\lim_{x \to c} k = k}$$ ให้ k เป็นค่าคงที่

ทฤษฎีบท 2

$$\boxed{\lim_{x \to c} x^n = c^n}$$

โสดทัศน์ # 1.33 (ต่อ)

ทฤษฎีบท 3

ถ้า $\lim_{x \to c} f(x) = A$ และ $\lim_{x \to c} g(x) = B$ แล้ว

3.1 $\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \pm \lim_{x \to c} g(x)$

$= A \pm B$

3.2 $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$

$= A \cdot B$

3.3 $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$

$= \frac{A}{B}$ เมื่อ $B \pm 0$

โสตทัศน์ # 1.34 กฎการดิฟเฟอเรนซิเอต

กฎการดิฟเฟอเรนซิเอต

1. $y = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว แล้ว $\frac{dy}{dx} = 0$

   นั่นคือ $\frac{dc}{dx} = 0$

2. ถ้า $y = x$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = 1$

   นั่นคือ $\frac{dx}{dx} = 1$

3. ถ้า $y = x^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริงแล้ว $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

   นั่นคือ $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$

4. ถ้า $v = cf(x)$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวแล้ว

   $\frac{d}{dx}(cv) = c\frac{dv(x)}{dx}$

5. ให้ $u = f(x)$ $v = g(x)$

   $\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du(x)}{dx} \pm \frac{dv(x)}{dx}$

โสดทัศน์ # 1.34 (ต่อ)

6. ให้ $u = f(x)$ $V = g(x)$

ถ้าฟังก์ชัน U และ V มีอนุพันธ์ x ใดๆ แล้ว

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

7. ให้ $u = f(x)$ $v = g(x)$ โดยที่ $g(x) = 0$

ถ้าฟังก์ชัน u และ v มีอนุพันธ์ x ใดๆ แล้ว

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{dy}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

8. $\frac{dv^n}{dx} = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$

กฎลูกโซ่

ถ้า $y = f(u)$ และ $u = g(x)$ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

โสตทัศน์ # 1.35 อินทิกรัล

ความหมายของอินทิกรัล คือค่าของลิมิตของฟังก์ชั่นแบบช่วง [a, b] ใดๆ ซึ่งก็คือการหาเพื่อที่ได้กราฟตามช่วงที่กำหนดให้นั่นเอง

คุณสมบัติของอินทิกรัล

1. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^d f(x)dx$

2. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^d f(x)\ dx + \int_a^b f(x)dx$

   เมื่อ $a < d < b$

3. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

4. $\int_a^b cdx = c(b - a)$ ถ้า $f(x) = c$

โสตทัศน์ # 1.36 ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

$$\int_a^b x^n dx \quad = \quad \frac{x^{n+1}}{n+1} \int_a^b$$

คำถามท้ายประเด็น

1. กำหนด $y = 5x^2$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

   1. $5x$
   2. $10x$
   3. $15x$
   4. $5x^2$
   5. $10x^2$

2. กำหนด $y = 5\sqrt{x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

   1. $\frac{5}{\sqrt{x}}$
   2. $\frac{5}{x}$
   3. $\frac{5}{2\sqrt{x}}$
   4. $\frac{5}{2x}$
   5. $\frac{2}{5x}$

3. กำหนด $y = (x^3 + 1)^2$ จงใช้กฎลูกโซ่หา $\frac{dy}{dx}$

   1. $6x^2 (x^3 + 1)$
   2. $3x^2 (x^3 + 1)$
   3. $2x^2 (x^3 + 1)$
   4. $x^2 (x^3 + 1)$
   5. $2 (x^3 + 1)$

4. กำหนด $y = \sqrt{1-x^2}$ จงใช้กฎลูกโซ่หา $\frac{dy}{dx}$

1. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

2. $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

3. $\frac{x}{\sqrt{1-x^3}}$

4. $\frac{-x}{\sqrt{1-x^3}}$

5. $\frac{x}{\sqrt{1-x}}$

5. จงหา $\int_0^1 x^2 dx$

1. $\frac{1}{2}$

2. $\frac{1}{3}$

3. $\frac{1}{4}$

4. $\frac{1}{5}$

5. $\frac{1}{6}$

6. จงหา $\int_1^3 (2x+1)dx$

1. 8
2. 9
3. 10
4. 11
5. 12

4. กำหนด $y = \sqrt{1-x^2}$ จงใช้กฎลูกโซ่หา $\frac{dy}{dx}$

1. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

2. $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

3. $\frac{x}{\sqrt{1-x^3}}$

4. $\frac{-x}{\sqrt{1-x^3}}$

5. $\frac{x}{\sqrt{1-x}}$

5. จงหา $\int_0^1 x^2 dx$

1. $\frac{1}{2}$

2. $\frac{1}{3}$

3. $\frac{1}{4}$

4. $\frac{1}{5}$

5. $\frac{1}{6}$

6. จงหา $\int_1^3 (2x+1)dx$

1. 8
2. 9
3. 10
4. 11
5. 12