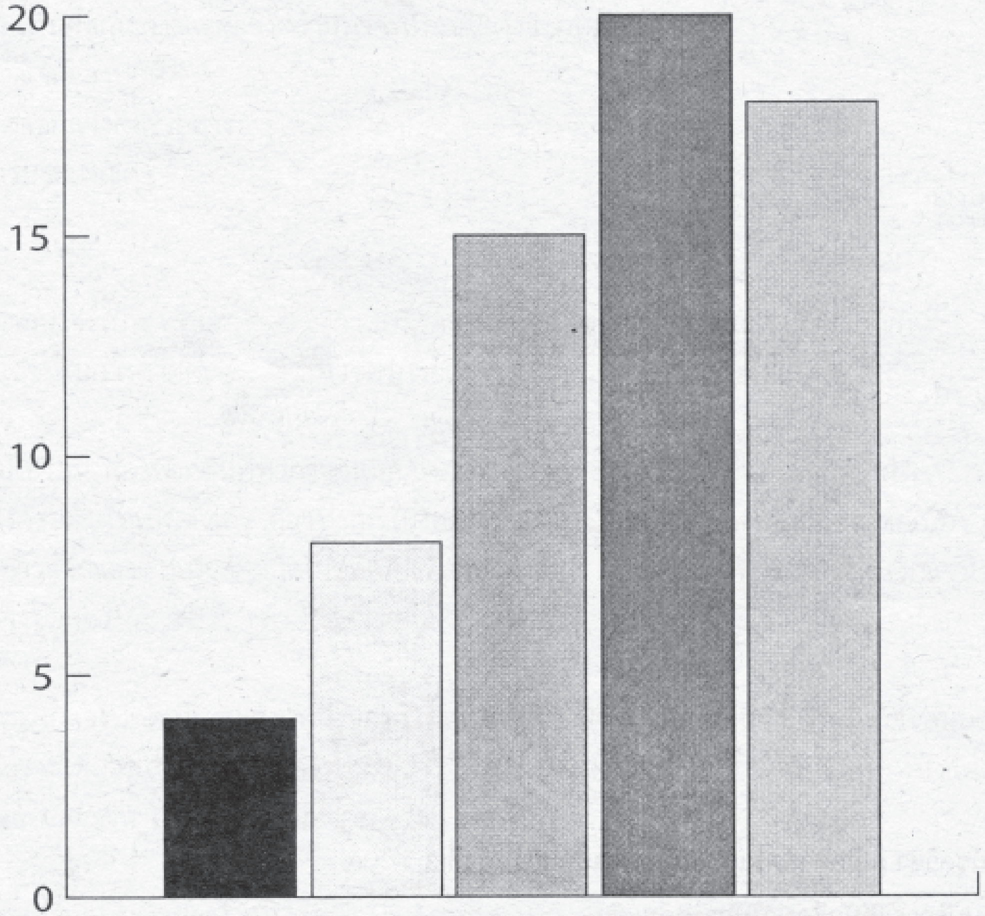
สาขาวิชาวิทยาการจัดการ

มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช

การสอนเสริมครั้งที่ 3

เอกสารโสตทัศน์ชุดวิชา

คณิตศาสตร์และสถิติ



3 0 2 0 5

Mathematics And Statistics

เอกสารโสตทัศน์ชุดวิชา คณิตศาสตร์และสถิติ การสอนเสริมครั้งที่ 3

จัดทำขึ้นเพื่อเป็นบริการแก่นักศึกษาในการสอนเสริม

จัดทำต้นฉบับ : คณะกรรมการกลุ่มผลิตชุดวิชา

บรรณาธิการ/ออกแบบ : หน่วยผลิตสื่อสอนเสริม ศูนย์โสตทัศนศึกษา

สำนักเทคโนโลยีการศึกษา

จัดพิมพ์ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช

พิมพ์ที่ : โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช

พิมพ์ครั้งที่ 31 ภาค 1/2558 พิมพ์ซ้ำ

แผนการสอนเสริม
ครั้งที่ 3

ชุดวิชา คณิตศาสตร์และสถิติ
การสอนเสริมครั้งที่ 3 หน่วยที่ 11–15

ประเด็นการสอนเสริม

1. ทฤษฎีความน่าจะเป็น
2. ตัวแปรสุ่มและการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม
3. การแจกแจงปกติ
4. การแจกแจงสิ่งตัวอย่าง
5. การประมาณค่า

แนวคิด

1. ความน่าจะเป็น เป็นค่าขี้บอกโอกาสหรือความน่าจะเกิดของเหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่งว่ามีมากน้อยเพียงใด ซึ่งจะเป็นประโยชน์ในการคาดคะเนสิ่งที่เกี่ยวข้องภายใต้ความไม่แน่นอนหรือภายใต้การสุ่มได้ดีขึ้น

2. ตัวแปรสุ่ม คือ ฟังก์ชันที่ทำการเปลี่ยนเหตุการณ์แต่ละเหตุการณ์ที่สามารถเกิดขึ้นได้จากการทดลองหรือการสุ่มเลือกสิ่งตัวอย่างให้เป็นตัวเลข ตัวแปรสุ่มแบ่งออกเป็น 2 ชนิด คือ ตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง และตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง การแจกแจงตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่องที่สำคัญ ได้แก่ การแจกแจงทวินาม การแจกแจงไฮเพอร์ยีออเมตริก และการแจกแจงปัวส์ซง

3. การแจกแจงปกติเป็นรูปแบบหนึ่งของการแจกแจงตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง ซึ่งเมื่อนำข้อมูลของตัวแปรดังกล่าวมาจุดลงจะได้เส้นโค้งปกติหรือโค้งรูประฆังคว่ำ โค้งทั้งสองด้านจะสมมาตรกัน และพื้นที่ใต้โค้งรวมกันจะเท่ากับ 1 โดยมีค่าเฉลี่ย มัธยฐาน หรือฐานนิยมเท่ากัน

4. การแจกแจงสิ่งตัวอย่าง เป็นการศึกษาเกี่ยวกับการแจกแจงของตัวสถิติเพื่อนำไปใช้ประโยชน์ในทางอนุมานทางสถิติ ซึ่งถ้าสุ่มเลือกตัวอย่างจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ ค่าเฉลี่ยของสิ่งตัวอย่างก็จะมีการแจกแจงปกติด้วย แต่ประชากรไม่มีการแจกแจงปกติ สิ่งตัวอย่างที่สุ่มได้จะมีการแจกแจงใกล้เคียงการแจกแจงปกติ ถ้ามีการสุ่มสิ่งตัวอย่างขนาดใหญ่พอ

5. การประมาณค่า คือวิธีการนำข้อมูลที่ได้จากสิ่งตัวอย่างมาประมาณค่าพารามิเตอร์โดยการหาค่าสถิติตัวประมาณค่า และค่าประมาณของพารามิเตอร์ การประมาณค่าแบ่งเป็น การประมาณค่าแบบจุด และการประมาณค่าแบบช่วง

วัตถุประสงค์

เมื่อมารับการสอนเสริมแล้ว นักศึกษาสามารถ

1. บอกความหมายและอธิบายหลักการทางสถิติในประเด็นของการสอนเสริมครั้งนี้ได้
2. สามารถคำนวณโดยอาศัยหลักการทางคณิตศาสตร์ได้

กิจกรรมการสอนเสริม

1. ฟังการสรุปประเด็นต่างๆ ตามเอกสารโสตทัศน์
2. ซักถามเกี่ยวกับประเด็นต่างๆ ของชุดวิชา
3. ทำแบบประเมินผลหลังการสอนเสริม
4. ประเมินผลการสอนเสริม

สื่อการสอนเสริม

1. เอกสารโสตทัศน์
2. แบบประเมินผลก่อนและหลังการสอนเสริม

หน่วยที่ 11
ทฤษฎีความน่าจะเป็น

โสตทัศน์ # 3.1 การทดลองเชิงสุ่ม

การทดลองเชิงสุ่ม (random experiment) หมายถึง การกระทำหรือการทดลองใดๆ ที่ไม่สามารถทำนายล่วงหน้าได้แน่นอนว่าผลอะไรจะเกิดขึ้นจากการทดลองนั้น

เช่น – โยนเหรียญบาท 1 อัน 1 ครั้ง ไม่ทราบว่าจะได้ หัว หรือ ก้อย

– ทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง ผลการทอดอาจเป็นหน้า 1,2,3…6

ผลที่เป็นไปได้ทั้งหมดหรือเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นทั้งหมดจากการทดลองเชิงสุ่ม จะนำมาเขียนได้ในรูปของเซต (Set) เรียกว่า "<u>สเปซตัวอย่าง</u>" (Sample Space: แทนด้วย S) และแต่ละสมาชิกของสเปซตัวอย่างหรือของผลจากการทดลองเรียกว่า "<u>จุดตัวอย่าง</u>" (Sample Point)

เช่น สเปซตัวอย่างของการโยนเหรียญบาท 1 อัน 1 ครั้ง คือ

S = {หัว, ก้อย} หรือ {H, T}

เมื่อ H แทนหัว และ T แทนก้อย

และ จุดตัวอย่างคือ H และ T

สเปซตัวอย่างของการทอดลูกเต๋า 1 ลูก ซึ่งมี 6 ด้าน คือ

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

และจุดตัวอย่างคือ 1, 2, 3, 4, 5, และ 6

โสตทัศน์ # 3.2 เหตุการณ์

เหตุการณ์ หมายถึง เหตุการณ์ที่เกิดจากการทดลองเชิงสุ่มหรือกลุ่มของจุดตัวอย่าง

เหตุการณ์ (แทนด้วย E) แบ่งได้เป็น 4 ลักษณะ คือ

1) เหตุแบบง่าย หมายถึงเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นเพียงเหตุการณ์เดียว และไม่สามารถแยกเป็นเหตุการณ์อื่นๆ ได้อีก เช่น เหตุการณ์ที่ 1 (การได้ลูกแก้วเบอร์ 4)

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$E_1 = \{4\}$

2) เหตุการณ์แบบผสม หมายถึง เหตุการณ์ที่สามารถแยกเป็นเหตุการณ์อื่นๆ ได้อีก เช่น เหตุการณ์ที่ 2 (การได้ลูกแก้วเบอร์เป็นเลขคี่)

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$E_2 = \{1, 3, 5\}$

หรือเหตุการณ์ที่ 3 (การได้ลูกแก้วเบอร์มากกว่า 3)

$E_3 = \{4, 5\}$

3) เหตุการณ์ที่เกิดร่วมกันได้ หมายถึง เหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ที่มีจุดตัวอย่างร่วมกัน เช่น การได้ลูกแก้วเบอร์เป็นเลขคู่ และการได้ลูกแก้วเบอร์น้อยกว่า 4

$A = \{2, 4, 6\}$

$B = \{1, 2, 3\}$

$A \cap B = \{2\}$

ดังนั้น เหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B เกิดร่วมกันได้ เมื่อได้ลูกแก้วเบอร์ 2

4) เหตุการณ์ที่เกิดร่วมกันไม่ได้ หมายถึง เหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ที่ไม่มีจุดตัวอย่างร่วมกัน เช่น การได้ลูกแก้วเบอร์เป็นเลขคู่ และการได้ลูกแก้วเบอร์เลขคี่

$A = \{2, 4, 6\}$

$C = \{1, 3, 5\}$

$A \cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{1, 3, 5\} = \varnothing$

ดังนั้น เหตุการณ์ A และเหตุการณ์ C เกิดร่วมกันไม่ได้

โสดทัศน์ # 3.3 ความน่าจะเป็น

ความน่าจะเป็น หมายถึง โอกาสที่เหตุการณ์อย่างหนึ่งจะเกิดขึ้นโดยคำนวณได้จากอัตราส่วนระหว่างจำนวนครั้งที่เหตุการณ์นั้นเกิดขึ้นกับจำนวนครั้งของการทดลองเชิงสุ่มที่ทำซ้ำกันทั้งหมด

$$\textbf{ความน่าจะเป็น} = \frac{\text{จำนวนครั้งที่เหตุการณ์เกิดขึ้น}}{\text{จำนวนครั้งของการทดลองเชิงสุ่ม}}$$

หรือ $$P(A) = \frac{n}{N}$$

<u>ตัวอย่าง</u> จากข้อมูลที่เก็บได้ในระยะเวลาหนึ่ง สายการบินไทยที่บินจากกรุงเทพไปเชียงใหม่จะถึงจุดหมายตรงตามเวลาที่กำหนดจำนวน 520 ครั้ง จากจำนวนเที่ยวบินทั้งหมด 600 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่การบินไทยเที่ยวบินนี้จะถึงจุดหมายตามเวลาที่กำหนด

<u>วิธีทำ</u>

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

$$= \frac{520}{600}$$

$$= 0.87$$

โสตทัศน์ # 3.4 คุณสมบัติของความน่าจะเป็น

คุณสมบัติของความน่าจะเป็น

1. ความน่าจะเป็นคือเลขจำนวนจริงที่มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 1

   $0 \leq P(A) \leq 1$

2. หากเหตุการณ์หนึ่งเท่ากับสเปซตัวอย่าง หรือ $A = S$

   $P(S) = 1$

   หรือคือความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นอย่างแน่นอน

3. หากเหตุการณ์ A และ B เกิดร่วมกันไม่ได้

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

โสตทัศน์ # 3.5 กฎความน่าจะเป็น

กฎความน่าจะเป็น

ความน่าจะเป็นเป็นการศึกษาโอกาสที่เหตุการณ์หนึ่งจะเกิดขึ้น แต่บางครั้งเหตุการณ์ที่เราสนใจจะเกี่ยวข้องกับเหตุการณ์อื่นๆ ด้วย จึงเกิดกฎต่างๆ ที่จะช่วยคำนวณความน่าจะเป็นให้ง่ายขึ้น เช่น กฎการบวก และกฎการคูณ

กฎการบวก (Addition Rule)

1) กฎการบวกของความน่าจะเป็นที่เกิดจากเหตุการณ์ที่เกิดร่วมกันไม่ได้

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

โสตทัศน์ # 3.5 (ต่อ)

2) กฎหาความน่าจะเป็นที่เกิดจากเหตุการณ์ที่เกิดร่วมกันได้

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

กฎของเหตุการณ์ประกอบ

ถ้า A เป็นเหตุการใดๆ

A' จะเป็นเหตุการณ์ตรงกันข้ามกับ A คือเหตุการณ์ที่เกิดขึ้น เมื่อ A ไม่เกิดขึ้น

$$P(A') = 1 - P(A)$$

ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข หมายถึง ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์หนึ่ง (B) จะเกิดขึ้น โดยมีเงื่อนไขว่าอีกเหตุการณ์หนึ่ง (A) ได้เกิดขึ้นแล้ว

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

กฎการคูณ (Multiplication Rule)

จากความหมายของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข เรานำมาเขียนเป็นกฎการคูณของความน่าจะเป็น คือ

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B/A)$$

โสตทัศน์ # 3.6 กฎของเบส์

กฎของเบส์ (Bayes, Rule)

เป็นกฎความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นร่วมกันไม่ได้หลายเหตุการณ์ที่เราสนใจ

$$P(A_k/B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B/A_k)}{\sum_{i=1}^{n} (A_i) \cdot P(B/A_i)}$$

โสตทัศน์ # 3.7 ค่าคาดหวังทางคณิตศาสตร์

ค่าคาดหวังทางคณิตศาสตร์

ค่าคาดหวังทางคณิตศาสตร์เกิดจากการนำตัวแปรสุ่มคูณกับความน่าจะเป็นของการเกิดตัวแปรสุ่มนั้นมาหาค่าเฉลี่ย

ตัวแปรสุ่ม คือ เงื่อนไขที่เรากำหนดขึ้นเพื่อเปลี่ยนเหตุการณ์ แต่ละเหตุการณ์ ที่สามารถเกิดขึ้นได้จากการทดลองหรือสุ่มให้เป็นตัวเลข

ค่าคาดหวังทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเขียนเป็นสูตรได้ดังนี้

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot P(X_i)$$

เมื่อกำหนดให้ i เท่ากับ 1,2,3,...,n

X_i คือ ตัวแปรสุ่ม

$P(X_i)$ คือ ความน่าจะเป็นของแต่ละตัวแปรสุ่ม

$E(X)$ คือ ค่าคาดหวังทางคณิตศาสตร์

คำถามท้ายประเด็น

1. ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ผลบวกของแต้มบนลูกเต๋าทั้งสองเป็น 6

2. การออกสลากกาชาดที่หนึ่ง มีการออกสลาก 500 ชุด โดยมีรางวัลทั้งหมด 20 รางวัล จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้จับสลาก 1 ชุดแล้วจะได้รางวัลจากการจับสลาก 20 ชุดแรก

3. ถ้าความน่าจะเป็นที่สุทธิจะได้เลื่อนขั้นเท่ากับ 0.65 และศักดิ์สิทธิ์จะได้เลื่อนขั้นเท่ากับ 0.72 และความน่าจะเป็นอย่างน้อย 1 คน จะได้เลื่อนขั้นเท่ากับ 0.88 จงหาความน่าจะเป็นที่ทั้งสองจะได้เลื่อนขั้น

4. ในการทำขนมเค้กชนิดหนึ่ง บางครั้งกานดาใส่น้ำตาลมากเกินไป บางครั้งใส่น้อยเกินไป บางครั้งลืมใส่น้ำตาล และบางครั้งใส่น้ำตาลได้พอดี ถ้าความน่าจะเป็นของแต่ละเหตุการณ์คือ 0.22, 0.18, 0.09 และ 0.51 ตามลำดับ จงหาค่าน่าจะเป็นที่กานดาจะใส่น้ำตาลมากเกินไปหรือน้อยเกินไป

5. ครอบครัวหนึ่งมีลูก 2 คน ถ้าความน่าจะเป็นที่ลูกคนแรกจะเรียนมหาวิทยาลัยเป็น 0.62 และที่ลูกคนที่ 2 จะเรียนมหาวิทยาลัยถ้าลูกคนแรกเรียนเป็น 0.44 จงหาความน่าจะเป็นที่ทั้งสองจะเรียนมหาวิทยาลัย

6. จากบันทึกของสายการบินแห่งหนึ่ง พบว่า ความน่าจะเป็นที่สายการบินจะได้รับคำร้องทุกข์จากผู้โดยสารเรื่องกระเป๋าเดินทางหายจำนวน 0,1,2,3,4 หรือ 5 คนต่อวันเป็น 0.04, 0.16, 0.24, 0.28, 0.18 และ 0.10 ตามลำดับ เราจะคาดคะเนว่าสายการบินแห่งนี้จะมีผู้โดยสารที่กระเป๋าเดินทางหายวันละกี่คน

หน่วยที่ 12

ตัวแปรสุ่ม และการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

โสตทัศน์ # 3.8 ตัวแปรสุ่ม

ตัวแปรสุ่ม คือ ฟังก์ชันหรือเงื่อนไขที่ทำการเปลี่ยนเหตุการณ์แต่ละเหตุการณ์ที่สามารถเกิดขึ้นไปได้จากการทดลอง หรือการสุ่มเลือกสิ่งตัวอย่างให้เป็นตัวเลข นิยมเขียนแทนด้วยอักษรตัวใหญ่ในภาษาอังกฤษ เช่น X, Y, Z เป็นต้น

ชนิดของตัวแปรสุ่มมี 2 ชนิด คือ 1. ตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง
2. ตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X เมื่อ X = x คือ f (x) = P (X = x) โดยมีคุณสมบัติดังนี้

1. $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ x1, x2……xn

2. $\sum_{X=X_1}^{X_n} f(X) = 1$ หรือ $\sum_{i=1}^{N} f(X_i) = 1$

โสตทัศน์ # 3.9 ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง

ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง X มีค่าเป็น $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ และฟังก์ชันความน่าจะเป็น X เมื่อ X = x คือ f (x)

ค่าคาดหวัง หรือค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม X คือ

$$E(X) = \sum_{X=X_i}^{X_n} x \cdot f(x) = x$$

โสตทัศน์ # 3.9 (ต่อ)

กฎของค่าคาดหวัง

1. ถ้า a เป็นค่าคงที่

$E(a) = a$ เช่น $E(3) = 3$

2. ถ้า a เป็นค่าคงที่

$E(ax)^k = aE(x^k)$ เช่น $E(3x) = 3E(x)$

โสตทัศน์ # 3.10 ค่าความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง

ค่าความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง

$$\sigma_x^2 = E(x - \mu_x)^2$$

$$= \sum_{x=x1}^{x_n} (x - \mu_x)^2 \cdot f(x)$$

กฎของค่าความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม x

1. ถ้า a เป็นค่าคงที่ ค่าความแปรปรวนของ a คือ

$$\sigma_a^2 = 0$$

2. ถ้า a เป็นค่าคงที่ ค่าความแปรปรวนของ ax คือ

$$\sigma_{ax}^2 = a^2\sigma_x^2$$

โสตทัศน์ # 3.10 (ต่อ)

3. ถ้า u (x) เป็นฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม x

$$\sigma^2_{u(x)} = E\,[u(x) - E\,(u(x))]^2$$

4. ถ้า a และ b เป็นค่าคงที่

$$\sigma^2_{ax+b} = a^2\sigma^2_x$$

โสตทัศน์ # 3.11 การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง

การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่องที่นิยมใช้มี 3 วิธีคือ

1. การแจกแจงทวินาม

เป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่องที่มีลักษณะเป็นการกระทำซ้ำกันหลายครั้งทุกครั้งเกิดเหตุการณ์ 2 อย่างคือ เหตุการณ์ที่ต้องการและเหตุการณ์ที่ไม่ต้องการ การทดลองแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกันและความน่าจะเป็นทางเหตุการณ์ที่ต้องการมีค่าคงที่เท่ากัน

ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของ x ที่มีการแจกแจงทวินามคือ

$$b\,(X;\,n,\,p) = f(x) = \binom{n}{x} p^x\,(1-p)^{n-x}$$

เมื่อ $x = 0, 1 \ldots n$

(หมายเหตุ การหาค่าความน่าจะเป็นทางการแจกแจงแบบทวินาม สามารถใช้ตารางได้)

ค่าเฉลี่ย $\mu_x = np$

ค่าความแปรปรวน $\sigma^2_x = npq$

โสตทัศน์ # 3.11 (ต่อ)

2. การแจกแจงไฮเพอร์ยีออเมตริก

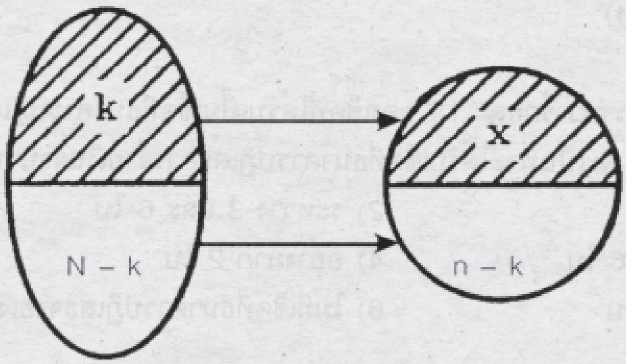
ลักษณะสำคัญทางการแจกแจงนี้คือ สุ่มเลือกสิ่งตัวอย่างแบบไม่คืนที่ n สิ่งจากประชากรซึ่งมีจำนวนจำกัด ประชากรมี N สิ่งแบ่งเป็น 2 พวก คือ พวกที่มีลักษณะตามต้องการซึ่งมี k สิ่งและพวกที่ไม่มีลักษณะตามต้องการซึ่งมี N – k สิ่ง

ฟังก์ชันการแจกแจง h (X ; N, n, k) เมื่อ X = x คือ

$$f(x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad \text{เมื่อ } x = 0, 1, 2\ldots n$$

ค่าเฉลี่ย $\mu_x = \frac{nk}{N}$

ค่าความแปรปรวน $\sigma_x^2 = \frac{N-n}{N-1}\,\frac{nk}{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)$



3. การแจกแจงปัวส์ซง

เป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นที่จะได้จำนวนสิ่งที่มีลักษณะตามที่สนใจภายในอาณาบริเวณหรือช่วงเวลาที่กำหนดให้

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นคือ P (x : μ)

$f(x) = e^{-\mu}\ \mu^x$ เมื่อ x = 0, 1, 2... (เปิดตารางภาคผนวกได้)

– ค่าเฉลี่ย $\mu_x = \mu$

– ค่าความแปรปรวน $\sigma_x^2 = \mu$

คำถามท้ายประเด็น

1. ถ้า x คือ จำนวนหนังสือพิมพ์ที่เด็กขายหนังสือพิมพ์ผู้หนึ่งขายได้ใน 1 ชั่วโมง และฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ x คือ

$f(x) = \frac{x+3}{85}$ เมื่อ x = 1, 2. 3...10

ให้คำนวณค่าของ
1) $P(x = 4)$
2) $P(2 \leq x \leq 4)$
3) $P(2 < x < 5)$
4) $P(x \leq 4)$
5) $P(x > 4)$

2. ถ้า x เป็นตัวแปรสุ่ม $E(x) = 3$ และ $E(x)^2 = 25$ ให้คำนวณค่า
1) ค่าเฉลี่ยของ $2x + 4$
2) $E(x^2 - 2x + 4)$
3) $E(x - E(x))^2$

3. บริษัทแห่งหนึ่งทราบว่าร้อยละ 15 ของเช็คที่ได้รับเป็นเช็คที่ธนาคารปฏิเสธการจ่ายเงิน ถ้าวันหนึ่งได้รับเช็ค 12 ใบ จงหาค่าความน่าจะเป็นที่จะได้รับเช็คที่ธนาคารปฏิเสธการจ่ายเงินจำนวน

1) 2 ใบ
2) ระหว่าง 3 และ 6 ใบ
2) ตั้งแต่ 3 ถึง 6 ใบ
4) อย่างมาก 2 ใบ
5) มากกว่า 3 ใบ
6) ไม่มีเช็คที่ธนาคารปฏิเสธจ่ายเงิน

4. บริษัทแห่งหนึ่งรับสมัครพนักงานจำนวน 2 คน แต่มีผู้สมัคร 20 คน เป็นชาย 12 คน หญิง 8 คน ผู้จัดการบริษัทจึงทำการสุ่มเลือกผู้สมัคร 4 คน เพื่อบรรจุเป็นพนักงานของบริษัทให้คำนวณค่าความน่าจะเป็นที่จะได้พนักงานชายจำนวน
1) 2 คน
2) อย่างมาก 2 คน

5. พนักงานรับโทรศัพท์ของบริษัทแห่งหนึ่งทราบจากประสบการณ์ว่ามีผู้โทรศัพท์เข้าบริษัทโดยเฉลี่ย 5 ครั้งต่อนาที ให้คำนวณค่าความน่าจะเป็นที่มีผู้โทรศัพท์ที่บริษัทนั้น
1) 2 ครั้ง ใน 1 นาที
2) มากกว่า 2 ครั้งใน 1 นาที

หน่วยที่ 13
การแจกแจงปกติ

โสตทัศน์ # 3.12 การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง

การแจกแจงปกติ

การแจกแจงปกติ เป็นการแจกแจงของตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง เมื่อนำข้อมูลมาลงจุดจะได้เส้นโค้งที่เรียกว่า โค้งปกติ หรือโค้งรูประฆังคว่ำ รูปร่างของโค้งปกติขึ้นอยู่กับค่าของพาริเตอร์สองตัวได้แก่ค่าเฉลี่ยของประชากร (μ) และค่าความแปรปรวนของประชากร (σ^2)

นอกจากการแจกแจงปกติ การแจกแจงที่เป็นแบบต่อเนื่องอื่นได้แก่

- การแจกแจงที่ (t)
- การแจกแจงเอฟ (F)
- การแจกแจงไค้สแควร์ χ^2

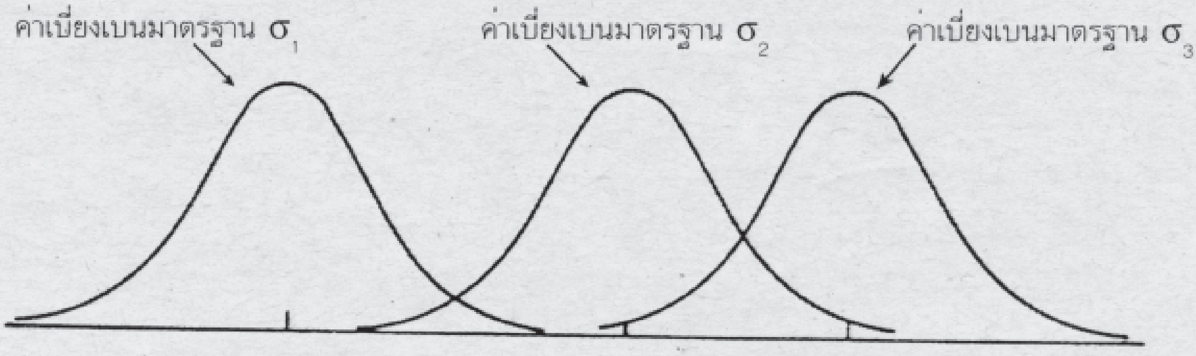
การแจกแจงทั้งสามชนิดนี้ขึ้นกับค่าองศาของความเป็นอิสระ (d.f.)

โสตทัศน์ # 3.13 ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปกติ

ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น

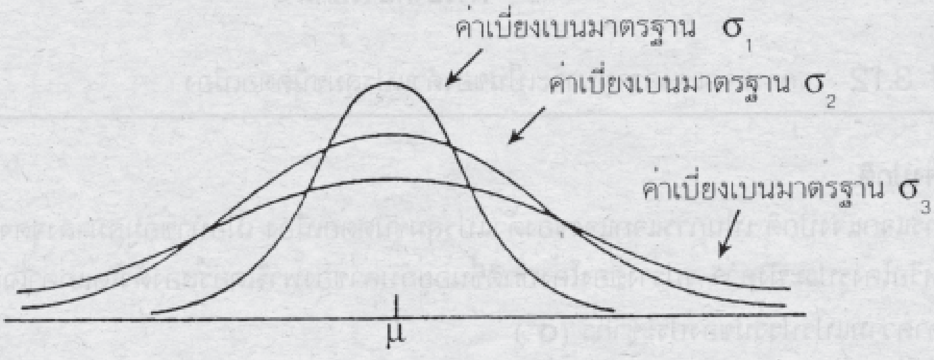
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma}}$$

โดยที่ $-\infty < x < \infty$ $\pi = 3.14159\ldots$ $e = 2.71828\ldots$

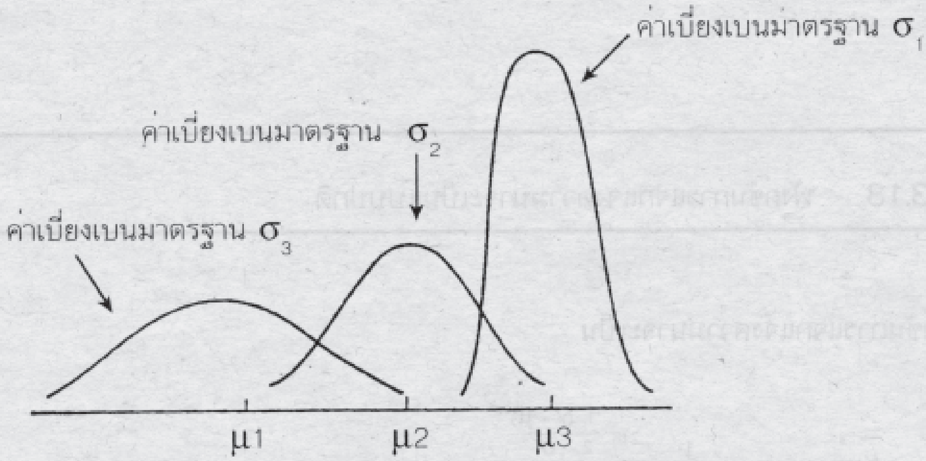


แสดงโค้งปกติที่มี $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$ แต่ $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

โสตทัศน์ # 3.13 (ต่อ)



แสดงโค้งปกติ กรณี $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$ และ $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$



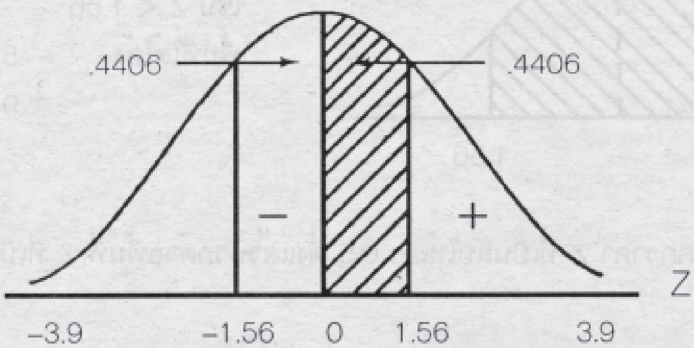
แสดงโค้งปกติที่มี $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$ แต่ $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$

โสดทัศน์ # 3.14 การหาพื้นที่

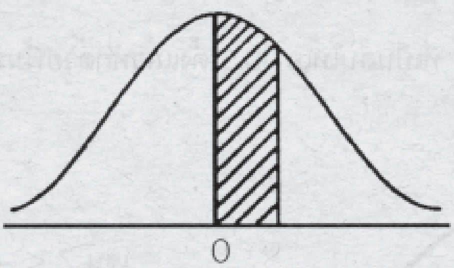
1. การหาพื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐาน (Z) ให้ใช้ตัวเลขที่ผู้ใช้ตารางพื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐานโดยตรง พื้นที่ใต้โค้งทั้งหมดเท่ากับ 1 พื้นที่ใต้โค้งตั้งแต่เส้นผ่านกลางถึงปลายโค้งข้างใดข้างหนึ่งเท่ากับ .5

2. การหาพื้นที่ใต้โค้งปกติ (X) ให้แปลงค่า X ให้เป็นค่า Z โดยใช้สูตร $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ แล้วเปิดตารางพื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐาน

ค่า Z ในตารางพื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐานนั้นมีตั้งแต่ 0.00 ถึง 3.90 และค่าของ Z ไม่ว่าจะเป็นค่าบวกหรือค่าลบจะเท่ากัน เช่น Z = + 1.56 พื้นที่ = 0.4406 และ Z = –1.56 พื้นที่ = 0.4406 เช่นกัน และค่า Z ที่เป็นบวกแสดงว่าพื้นที่อยู่ทางด้านขวาของเส้นผ่ากลาง ส่วนค่า Z ที่เป็นลบแสดงว่าเนื้อที่อยู่ทางซ้ายของเส้นผ่านกลางของใต้โค้งปกติมาตรฐาน



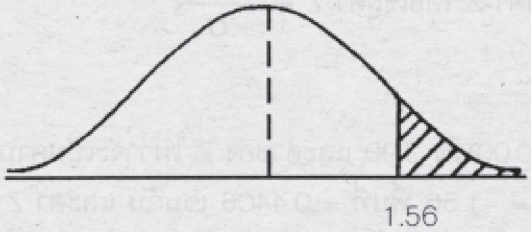
พื้นที่ใต้โค้งในตารางจะเริ่มที่ Z = 0



โสดทัศน์ # 3.14 (ต่อ)

การเปิดพื้นที่ใต้โค้งปกติขอให้วาดรูปโค้งเสมอแล้วดูที่คำสั่งของโจทย์ว่าถามอะไร

ถ้าโจทย์ถามว่ามากกว่าค่า Z ที่เป็นบวกให้เอา 0.5 ตั้งแล้วหักด้วยพื้นที่ Z ค่าที่เป็นค่าบวกนั้น

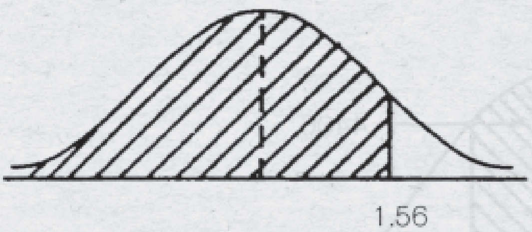


เช่น Z > 1.56

พื้นที่ใต้โค้ง = .5 − .4406

= .0594

ถ้าโจทย์ถามว่าน้อยกว่าค่า Z ที่เป็นบวกให้เอา 0.5 ตั้งแล้วบวกด้วยพื้นที่ Z ที่เป็นที่เป็นค่าบวกนั้น

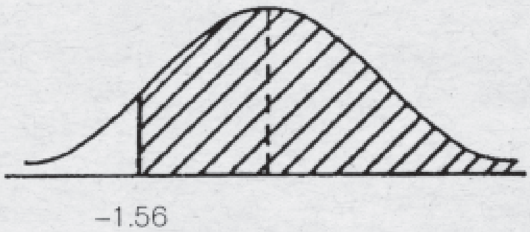


เช่น Z < 1.56

พื้นที่ใต้โค้ง = .5 + .4406

= .9406

ถ้าโจทย์ถามว่ามากกว่าค่า Z ที่เป็นลบให้เอา 0.5 ตั้งแล้วบวกด้วยพื้นที่ Z ที่เป็นค่าลบนั้น

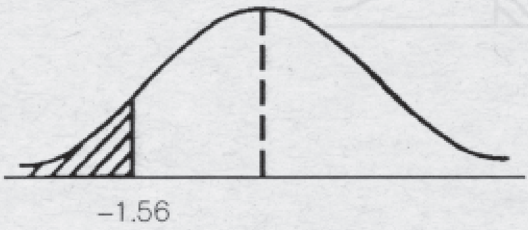


เช่น Z > −1.56

พื้นที่ใต้โค้ง = .5 + .4406

= .9406

ถ้าโจทย์ถามว่าน้อยกว่าค่า Z ที่เป็นลบให้เอา 0.5 ตั้งแล้วหักด้วยพื้นที่ Z ที่เป็นค่าลบนั้น



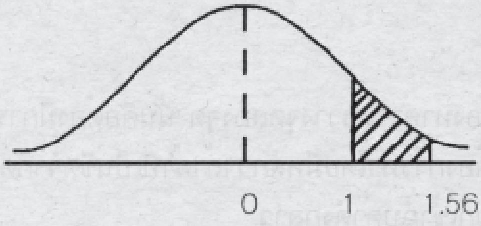
เช่น Z < −1.56

พื้นที่ใต้โค้ง = .5 − .4406

= .0594

โสตทัศน์ # 3.14 (ต่อ)

ถ้าโจทย์ถามว่าคู่ระหว่างค่า Z เป็นบวกหรือลบให้เอาพื้นที่บวกค่า Z ที่มากกว่าตั้งแล้วหักด้วยพื้นที่ของค่า Z ที่น้อยกว่า

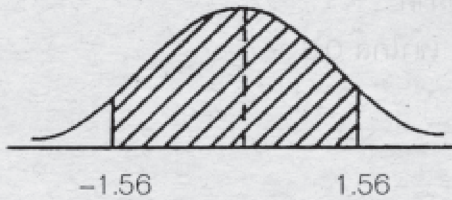


$1 < Z < 1.56$

พื้นที่ใต้โค้ง $= .4406 - .3413$

$= .0993$

ถ้าโจทย์ถามหาพื้นที่ของ Z ที่เป็นทั้งบวก และลบให้เอาพื้นที่ของค่า Z แต่ละตัวมารวมกัน



$-1.56 < Z < 1.56$

พื้นที่ใต้โค้ง $= .4406 + .4406$

$= .8812$

โสตทัศน์ # 3.15

การประมาณการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่องด้วยการแจกแจงปกติ

เหตุผลสำคัญโอกาสใช้การแจกแจงปกติและการแจกแจงของตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่องคือ

1. คำนวณง่ายกว่า
2. เสียเวลาและค่าใช้จ่ายน้อยกว่า

แต่เนื่องจากค่าของพื้นที่ของค่าใดค่าหนึ่งมีค่าเท่ากับ 0 จึงต้องหาค่าระหว่างจุดสองจุด นั้นคือต้องมีการปรับค่าเพื่อความต่อเนื่องโดยนำ 0.5 ไปบวกและลบ ออกจากค่าที่ต้องการหาโดยมีหลักว่าถ้าค่าที่เป็นขีดจำกัดล่างให้นำ 0.5 ไปหักออก แต่ถ้าเป็นค่าขีดจำกัดบนให้เอา 0.5 ไปบวกเข้ากับค่าดังกล่าว

การประมาณการแจกแจงทวินามด้วยการแจกแจงปกติ

เงื่อนไขสำคัญ

1. ควรใช้กรณีที่ค่า p มีค่าไม่เข้าใกล้ 0 หรือ 1 หรือมีค่ากลางๆ
2. ถ้า p เข้าใกล้ 0 การประมาณจะใช้ได้ดีถ้า n มีขนาดใหญ่มาก
3. ถ้า n มีค่าไม่ใหญ่นักการประมาณก็ยังจะใช้ได้อีก ถ้า p เข้าใกล้ 0.5
4. np และ nq ต้องมีค่าไม่น้อยกว่า 5

การประมาณการแจกแจงปัวส์ซงด้วยการแจกแจงปกติ

เงื่อนไขสำคัญ

n มีขนาดใหญ่ (n>30) และค่าเฉลี่ยมีค่ามาก (μ>10)

คำถามท้ายประเด็น

1. จงหาพื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐาน เมื่อ z มีค่า
   1) มากกว่า 2.34
   2) น้อยกว่า 2.34
   3) มากกว่า –2.34
   4) $1.34 < Z < 2.34$
   5) อยู่ระหว่าง $\pm$ 2.34

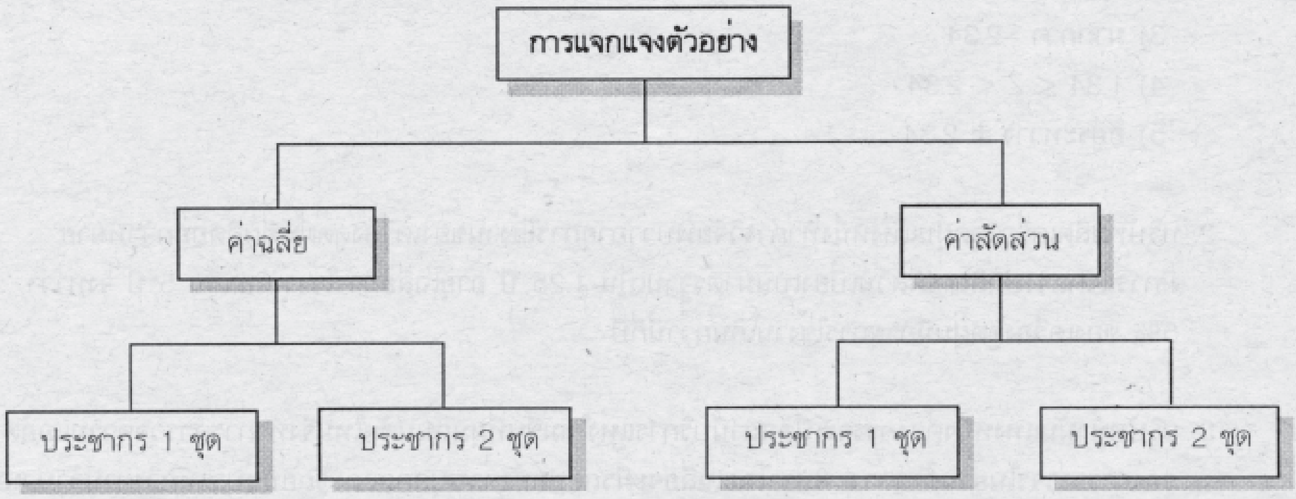
2. บริษัทผลิตเครื่องดูดฝุ่นแห่งหนึ่งทำการวิจัยพบว่าอายุการใช้งานของเครื่องดูดฝุ่นที่ผลิตออกจำหน่ายมีการแจกแจงปกติโดยมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 1.25 ปี อายุเฉลี่ยการใช้งานเท่ากับ 5 ปี จงหาว่า 5% ของเครื่องดูดฝุ่นมีอายุการใช้งานเกินกว่านี้กี่ปี

3. บริษัทน้ำมันแห่งหนึ่งต้องการจะเปิดสถานีบริการแห่งใหม่ขึ้นที่มุมถนนตัดใหม่จึงทำการสำรวจความแออัดของการจราจรในย่านดังกล่าว พบว่าโดยเฉลี่ยจะมีรถยนต์นั่งส่วนบุคคลและรถยนต์บรรทุกวิ่งผ่านจำนวน 16 คันต่อนาที จงหาค่าความน่าจะเป็นที่รถยนต์นั่งส่วนบุคคลและรถยนต์บรรทุกวิ่งผ่านย่านดังกล่าวจำนวน 15 คัน ในเวลาหนึ่งนาที

หน่วยที่ 14

การแจกแจงสิ่งตัวอย่าง

โสตทัศน์ # 3.16 การแจกแจงตัวอย่าง



โสตทัศน์# 3.17 การแจกแจงตัวอย่างเกี่ยวกับค่าเฉลี่ย

การแจกแจงตัวอย่างเกี่ยวกับค่าเฉลี่ย

ถ้าให้ X_i = ค่าของตัวอย่างที่ i ที่สุ่มเลือกมาจากประชากรโดยสุ่มมาทั้งหมด n ตัวอย่าง

ค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง คือ

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{n}$$

โสดทัศน์ # 3.17 (ต่อ)

ค่าความแปรปรวนของตัวอย่างคือ

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n - 1}$$

ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวอย่าง คือ

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n - 1}}$$

โสดทัศน์ # 3.18 การหาค่าเฉลี่ยของค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง

การหาค่าเฉลี่ยของค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง

ถ้าสุ่มเลือกตัวอย่าง จำนวน n หน่วยจากประชากร N หน่วยที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ ค่าเฉลี่ยของค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง($\mu_{\bar{x}}$) มีค่าเท่ากับ μ นั่นคือ

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

โสตทัศน์ # 3.19 การหาค่าความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง

การหาค่าความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง

ในการสุ่มเลือกตัวอย่างจำนวน n หน่วยจากประชากร N หน่วยที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ ค่าความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 ถ้า $\bar{X}$ เป็นค่าเฉลี่ยของตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ $\bar{X}$ จะมีการแจกแจงปกติด้วย โดยมีค่าเฉลี่ย $\mu_{\bar{x}} = \mu$ และค่าความแปรปรวน $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ นั่นคือ

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma^2}{n}$$

โสตทัศน์ # 3.20 การแจกแจงของค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง

การแจกแจงของค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง

1. การแจกแจงของค่าเฉลี่ย ($\bar{X}$) ในกรณีประชากร 1 ชุด

การแจกแจงของประชากร	การแจกแจงของ $\bar{X}$
1. เมื่อทราบค่า σ^2	$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$
2. เมื่อไม่ทราบค่า σ^2 และ $n \geq 30$	$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}}$

โสตทัศน์ # 3.20 (ต่อ)

2. การแจกแจงของผลต่างของค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ ในกรณีประชากร 2 ชุด

การแจกแจงของประชากร	การแจกแจงของ $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$
1. เมื่อทราบค่า σ_1^2 และ σ_2^2	$Z = \dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$
2. เมื่อไม่ทราบค่า σ_1^2 และ σ_2^2	$Z = \dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$

โสตทัศน์ # 3.21 การแจกแจงตัวอย่างของค่าสัดส่วนในกรณีประชากร 1 ชุด

การแจกแจงตัวอย่างของค่าสัดส่วนในกรณีประชากร 1 ชุด

ค่าเฉลี่ยของประชากรที่มีลักษณะตามต้องการ $\mu_x = np$ และค่าความแปรปรวนของ X จะมีค่า $\sigma_x^2 = npq$

ค่าเฉลี่ยของค่าสัดส่วนของตัวอย่างที่มีลักษณะตามต้องการ $\mu_{\hat{p}} = p$ และความแปรปรวนของค่าสัดส่วนของตัวอย่างที่มีลักษณะตามต้องการ $\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{pq}{n}$

$$Z = \frac{\hat{p} - \mu_{\hat{p}}}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

โสตทัศน์ # 3.22 การแจกแจงตัวอย่างของผลต่างของค่าสัดส่วนในกรณีประชากร 2 ชุด

การแจกแจงตัวอย่างของผลต่างของค่าสัดส่วนในกรณีประชากร 2 ชุด

ถ้าจำนวนตัวอย่างที่สุ่มเลือกมาจากประชากรแต่ละชุดมีขนาดใหญ่ ($n_1 \geq 30$ และ $n_2 \geq 30$) โดยอาศัยทฤษฎีขีดจำกัดกลางจะได้ว่า ผลต่างของค่าสัดส่วนของตัวอย่าง คือ $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ จะมีการแจกแจงใกล้เคียงกับการแจกแจงปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ $\mu_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = p_1 - p_2$ และค่าความแปรปรวนเท่ากับ $\sigma^2_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_1 q_2}{n_2}$ และสามารถใช้สูตรการแปลงค่าตัวแปรสุ่มให้เป็นตัวแปรสุ่มปกติมาตรฐานได้ ดังนี้

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (\mu_{\hat{p}1} - \mu_{\hat{p}2})}{\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}} = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_1 q_2}{n_2}}}$$

กิจกรรมท้ายบท

1. สมมติว่าบริษัทขนาดใหญ่ในประเทศไทยมีลูกจ้างเฉลี่ย 120 คน โดยมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 12 คน ถ้าสุ่มเลือกบริษัทขนาดใหญ่ในเขตกรุงเทพมหานคร และจังหวัดใกล้เคียงจำนวน 100 บริษัท จงหาค่าความน่าจะเป็นที่บริษัทที่สุ่มเลือกมานี้จะจ้างคนงานเฉลี่ยอยู่ในระหว่าง 119 ถึง 121 คน

2. สมมติว่าเครื่องจักร 2 เครื่องมีประสิทธิภาพพอๆ กันโดยที่ต่างก็ผลิตสินค้าที่มีข้อบกพร่องเพียงประมาณ 6% ถ้าสุ่มเลือกสินค้าจำนวน 400 ชิ้น ที่ผลิตจากเครื่องจักรทั้งสอง จงหาค่าความน่าจะเป็นของความแตกต่างของค่าสัดส่วนของสินค้าที่บกพร่องที่ผลิตโดยเครื่องจักรทั้งคู่จะมีมากกว่า 4%

3. โรงงานผลิตอาหารสัตว์แห่งหนึ่งโฆษณาว่าถ้าใช้อาหารสูตรพิเศษกับไก่พันธุ์เนื้อจะทำให้น้ำหนักเพิ่มขึ้นมากกว่าการใช้อาหารสูตรธรรมดาภายในระยะเวลาเพียง 1 สัปดาห์ เพื่อเป็นการพิสูจน์ข้ออ้างนี้ ได้มีการสุ่มเลือกไก่ 2 กลุ่มๆ ละ 900 ตัว โดยกลุ่มแรกเป็นไก่พันธุ์เนื้อที่ใช้อาหารสูตรพิเศษและกลุ่มที่สองเนื้อไก่พันธุ์เนื้อที่ใช้อาหารสูตรธรรมดา สมมติว่าค่าความแปรปรวนของประชากรเท่ากับ 4.5 กิโลกรัม จงหาค่าความน่าจะเป็นของค่าเฉลี่ยที่น้ำหนักของไก่พันธุ์เนื้อที่ใช้อาหารสูตรพิเศษจะมากกว่าน้ำหนักของไก่พันธุ์เนื้อที่ใช้อาหารสูตรธรรมดาตั้งแต่ 0.3 กิโลกรัมขึ้นไป

4. สมมติว่าจากการวิจัยพบว่าร้อยละ 64 ของประชากรตำบลหนึ่งนิยมใช้ยาสีฟันยี่ห้อหนึ่ง ถ้าสุ่มเลือกตัวอย่างจำนวน 100 คน จากประชากรของตำบลดังกล่าว จงหาค่าความน่าจะเป็นที่สัดส่วนของผู้ที่นิยมใช้ยาสีฟันยี่ห้อหนึ่งที่สุ่มเลือกจะอยู่ระหว่าง 0.60 ถึง 0.68

5. บริษัทสำรวจความนิยมแห่งหนึ่งต้องการศึกษาว่ารายการภาพยนตร์ยอดนิยมรายการหนึ่งมีผู้ชมที่เป็นผู้มีฐานะดีและฐานะปานกลางเท่ากันหรือไม่ สมมติว่าจากข้อมูลในอดีตพบว่ารายการเช่นนี้มักมีผู้ชมที่มีฐานะดี 40% และผู้ชมที่มีฐานะปานกลางชมถึง 50% ที่สุ่มเลือกตัวอย่างโดยการแจกแบบสอบถามจำนวน 100 ราย ในกลุ่มผู้มีฐานะดีและจำนวน 200 รายในกลุ่มที่มีฐานะปานกลาง จงหาค่าความน่าจะเป็น

ก. ค่าสัดส่วนของผู้ชมที่มีฐานะปานกลางจะชมรายการยอดนิยมดังกล่าวมากกว่าผู้ชมที่มีฐานะดีอยู่ระหว่าง 8 ถึง 12%

ข. ผลต่างของค่าสัดส่วนของผู้ชมทั้งสองกลุ่มไม่เกิน 5%

หน่วยที่ 15
การประมาณค่า

โสตทัศน์ # 3.23 การประมาณค่า: ความหมาย

ความหมายของการประมาณค่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์คือวิธีการที่นำข้อมูลจากตัวอย่างไปประมาณค่าพารามิเตอร์ ในการประมาณค่าประชากรนี้จำเป็นต้องหาตัวสถิติ ตัวประมาณและค่าประมาณจากข้อมูลที่ได้จากสิ่งตัวอย่าง

ตัวสถิติ คือตัวที่บอกให้ทราบถึงลักษณะบางประการของตัวอย่าง ตัวสถิติจะเป็นฟังก์ชันของข้อมูลจากตัวอย่างและต้องไม่มีค่าพารามิเตอร์รวมอยู่ด้วย ตัวอย่างของตัวสถิติคือ $\bar{X}$, S^2, $\hat{p}$, มัธยฐาน, ฐานนิยม

ตัวประมาณ คือตัวสถิติที่นำไปใช้ประมาณพารามิเตอร์

ตัวอย่างของตัวประมาณคือ $\hat{\theta}$ ซึ่งเป็นตัวประมาณค่าของ θ

$\bar{x}$ เป็นตัวประมาณค่าของ μ

ค่าประมาณ คือค่าตัวเลขของตัวประมาณซึ่งคำนวณได้จากข้อมูลของสิ่งตัวอย่างดังกล่าวของค่าประมาณคือ

$\bar{x} = 10$ นั่นคือตัวประมาณของ μ คือ $\bar{X}$ และค่าประมาณของ μ คือ 10

โสตทัศน์ # 3.24 ชนิดและคุณสมบัติของตัวประมาณที่ดี

ชนิดของการประมาณ

การประมาณค่าสามารถทำได้ 2 วิธีคือ

1) การประมาณค่าแบบจุด

2) การประมาณค่าแบบช่วง

การประมาณค่าแบบจุดคือวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยให้พารามิเตอร์มีค่าได้เพียงค่าเดียว เช่น ค่าประมาณของ μ เท่ากับ 10

การประมาณค่าแบบช่วงคือวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยให้พารามิเตอร์มีค่าเป็นจุดใดจุดหนึ่งในช่วงที่กำหนด เช่น เป็นค่าประมาณของ μ มีค่าตั้งแต่ 8 ถึง 12

โสตทัศน์ # 3.24 (ต่อ)

คุณสมบัติของตัวประมาณของค่าที่ดี

ตัวประมาณที่ดีต้องมีคุณสมบัติ 2 ข้อ ต่อไปนี้

1) เป็นตัวประมาณที่ไม่ลำเอียง

2) เป็นตัวประมาณที่มีความแปรปรวนน้อยที่สุด

ถ้า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณของพารามิเตอร์ θ $\hat{\theta}$ จะเป็นตัวประมาณที่ไม่ลำเอียงของ θ ถ้า $E(\hat{\theta}) = \theta$

ถ้า $\hat{\theta}_1$ และ $\hat{\theta}_2$ เป็นตัวประมาณที่ไม่ลำเอียงของพารามิเตอร์ θ $\hat{\theta}_1$ จะมีประสิทธิภาพสูงกว่า $\hat{\theta}_2$ ถ้า $\sigma^2_{\hat{\theta}_1} < \sigma^2_{\hat{\theta}_2}$

โสตทัศน์ # 3.25 การประมาณค่าแบบช่วงของค่าเฉลี่ย

การประมาณค่าแบบช่วงของค่าเฉลี่ย

ก. สำหรับประชากรชุดเดียว แบ่งออกเป็น 3 กรณีคือ

1) ถ้ารู้ค่า σ^2 ไม่ว่าจะสุ่มตัวอย่างมาขาดเท่าใดก็ตามสูตรที่ใช้คือ

$$\overline{X} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{หรือ} \quad \overline{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

2) ถ้าไม่รู้ค่า σ^2 และสุ่มตัวอย่างมาขนาดใหญ่ ($n > 30$) สูตรที่ใช้คือ

$$\overline{X} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \quad \text{หรือ} \quad \overline{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

3) ถ้าไม่รู้ค่า และสุ่มตัวอย่างมาขนาดเล็ก ($n < 30$) สูตรที่ใช้คือ

$$\overline{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \quad \text{หรือ} \quad \overline{X} \quad t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

โดย t มี $df = n-1$

โสดทัศน์ # 3.25 (ต่อ)

ข. สำหรับประชากรสองชุด แบ่งออกเป็น

1) ทราบค่าความแปรปรวนของประชากรไม่ว่า n จะมีขนาดใดก็ตามสูตรที่ใช้คือ

$$(X_1 - X_2) \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

2) ไม่ทราบค่าความแปรปรวนของประชากร

2.1 ถ้า n_1 และ n_2 มีค่ามากสูตรที่ใช้คือ

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

2.2 ถ้า n_1 และ n_2 มีค่าน้อยและสมมติว่า $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ สูตรที่ใช้คือ

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S^2p}{n_1} + \frac{S^2p}{n_2}} \quad \text{โดยที่ } S^2p = \frac{(n1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

2.3 ถ้า n_1 และ n_2 มีค่าน้อยและ $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ สูตรที่ใช้คือ

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S^2_1}{n_1} + \frac{S^2_2}{n_2}}$$

โดยที่ t จะมีองศาความเป็นอิสระเท่ากับ

$$\frac{\left[\frac{S^2_1}{n_1} + \frac{S^2_2}{n_2}\right]^2}{\frac{\left(\frac{S^2_1}{n_1}\right)^2}{n_1-1} + \frac{\left(\frac{S^2_2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$$

โสตทัศน์ # 3.26 การประมาณค่าแบบช่วงของสัดส่วนประชากร

การประมาณค่าแบบช่วงของค่าสัดส่วนของประชากร

ก. สำหรับประชากรชุดเดียว สูตรที่ใช้คือ

$$\hat{p} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \quad \text{โดยที่} \quad \hat{p} = \frac{x}{n} \quad \text{และ} \quad \hat{q} = 1 - \hat{p}$$

ข. สำหรับประชากรสองชุด สูตรที่ใช้คือ

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_2}{n_1} + \frac{\hat{p}_1\hat{q}_2}{n_1}}$$

โสตทัศน์ # 3.27 การคำนวณขนาดของสิ่งตัวอย่างกรณีต่างๆ

การคำนวณขนาดของสิ่งตัวอย่าง ใช้ 2 สูตร

ก. กรณีค่าเฉลี่ย

1) ถ้ารู้ค่า σ

$$n = \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}\ \sigma}{e}\right)^2$$ โดยที่ e = ขนาดของความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้

2) ถ้าไม่รู้ σ

$$n = \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}\ S}{\begin{matrix}2\\C\end{matrix}}\right)^2$$

ค่า n ที่คำนวณได้ถ้ามีทศนิยมให้ปัดขึ้นทุกกรณีไม่ว่าค่าทศนิยมนั้นจะมากหรือน้อยกว่า 5

โสดทัศน์ # 3.27 (ต่อ)

ข. กรณีสัดส่วนใช้สูตร

$$n = \frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}^{2} \; \hat{p}\,\hat{q}}{e^{2}}$$

ถ้า n มีจุดทศนิยม ให้ปัดเป็นจำนวนเต็ม

คำถามท้ายประเด็น

1. บริษัทผลิตหลอดไฟ รายงานว่าค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของอายุการใช้งานหลอดไฟ ก. เท่ากับ 40 ชั่วโมง และบริษัทผลิตหลอดไฟ ข. รายงานว่าค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของหลอดไฟ ข. เท่ากับ 45 ชั่วโมง ถ้าสุ่มหลอดไฟ ก. จำนวน 16 หลอด และหลอดไฟ ข. จำนวน 10 หลอด แล้วนำไปทดสอบปรากฏว่าอายุเฉลี่ยการใช้งานของหลอดไฟ ก. หลอดไฟ ข. เทากับ 790 และ 760 ชั่วโมงตามลำดับ ช่วงความเชื่อมั่นที่ระดับ 95% ของผลต่างของอายุเฉลี่ยการใช้งานของหลอดไฟของบริษัท ก. และ ข. เท่ากับเท่าใดถ้าอายุการใช้งานของหลอดไฟมีการแจกแจงปกติ

2. ถ้าสุ่มเลือกคนในเขตกรุงเทพมหานครจำนวน 100 คน และรวบรวมจำนวนชั่วโมงที่ดูโทรทัศน์ต่อสัปดาห์ปรากฏว่าจำนวนชั่วโมงเฉลี่ยที่ดูโทรทัศน์เท่ากับ 14 ชั่วโมงต่อสัปดาห์และมีค่าความแปรปรวนเท่ากับ 16 ชั่วโมงถ้าสุ่มเลือกคนในจังหวัดเชียงใหม่จำนวน 200 คน และสอบถามจำนวนชั่วโมงที่ดูโทรทัศน์ต่อสัปดาห์ปรากฏว่าจำนวนชัวโมงเฉลี่ยที่ดูโทรทัศน์เท่ากับ 10 ชั่วโมงต่อสัปดาห์ และมีค่าความแปรปรวนเท่ากับ 16 ชั่วโมง อยากทราบว่าช่วงของผลต่างของจำนวนชั่วโมงเฉลี่ยที่คนในจังหวัดทั้งสองใช้ในการดูโทรทัศน์ต่อสัปดาห์เท่ากับเท่าใดถ้าใช้ระดับความเชื่อมั่น 99%

3. ผู้อำนวยการโรงเรียนแห่งหนึ่งสุ่มเลือกนักเรียนระดับมัธยมศึกษาจำนวน 13 คนแล้วสอบถามรายจ่ายของของนักเรียนแต่ละคน ปรากฏว่ารายจ่ายเฉลี่ยเท่ากับ 20 บาทต่อวัน และมีค่าความแปรปรวนเท่ากับ 36 บาท และสุ่มเลือกนักเรียนระดับประถมศึกษาจำนวน 9 คน สอบถามรายจ่ายแต่ละคนปรากฏว่าเท่ากับ 10 บาทต่อวัน และมีค่าความแปรปรวนเท่ากับ 36 บาท และสุ่มเลือกนักเรียนระดับประถมศึกษาจำนวน 9 คน สอบถามรายจ่ายแต่ละคนปรากฏเท่ากับ 10 บาทต่อวัน และมีค่าความแปรปรวนเท่ากับ 10 บาทต่อวัน และมีค่าความแปรปรวนเท่ากับ 20.25 บาท ช่วงความเชื่อมั่นที่ระดับ 95% ของผลต่างของรายจ่ายเฉลี่ยต่อตัวของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาและประถมศึกษาเท่ากับเท่าใดถ้ากำหนดให้ค่าความแปรปรวนของทั้งสองระดับเท่ากัน

4. บริษัทผลิตสบู่ยี่ห้อหนึ่งต้องการทำการสุ่มเลือกคนในเขตกรุงเทพมหานาครเพื่อประมาณค่าสัดส่วนของคนในเขตกรุงเทพมหานครที่ใช้สบู่ยี่ห้อนั้นโดยต้องการให้ค่าความคลาดเคลื่อนไม่เกิน 0.01 จากข้อมูลพบว่า ค่าสัดส่วนของคนในเขตกรุงเทพมหานครที่ใช้สบู่ยี่ห้อดังกล่าวเท่ากับ 0.2 ถ้ากำหนดระดับความเชื่อมั่นเท่ากับ 95% บริษัทสุ่มเลือกคนมากี่คน

5. บริษัทผลิตสบู่ยี่ห้อหนึ่งทำการสุ่มเลือกคนในเขตกรุงเทพมหานคร จำนวน 500 คน พบว่ามี 100 คนที่ใช้สบู่ยี่ห้อนั้น และสุ่มเลือกคนในจังหวัดเชียงใหม่ 1,000 คน พบว่ามี 300 คนที่ใช้สบู่ยี่ห้อนั้น ช่วงความเชื่อมั่น 94% ของผลต่างของค่าสัดส่วนของคนในจังหวัดทั้งสองที่ใช้สบู่ยี่ห้อนั้นเท่ากับเท่าใด