96102

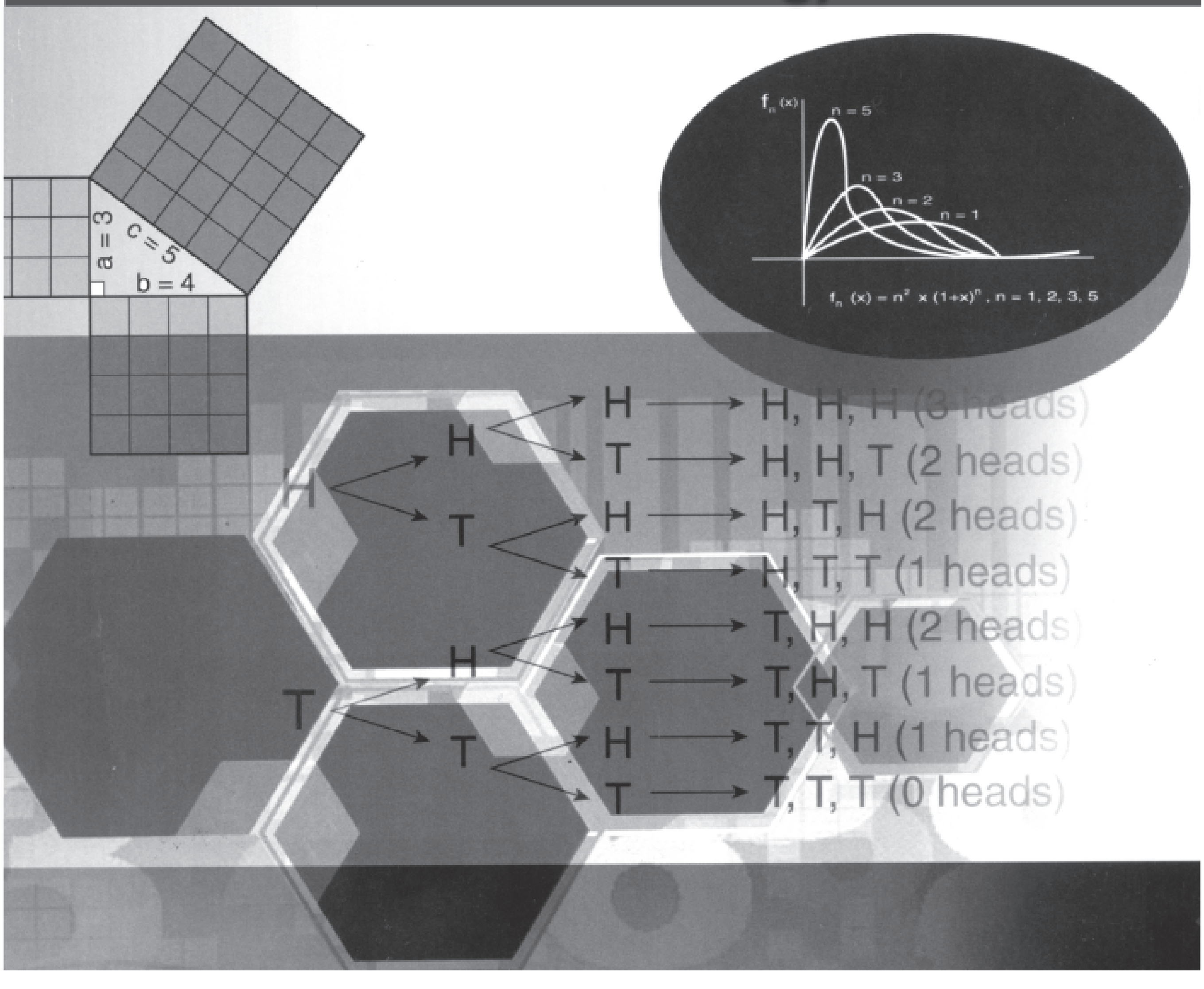
สาขาวิชาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช

การสอนเสริมครั้งที่ 1

เอกสารโสตทัศน์ชุดวิชา

คณิตศาสตร์และสถิติสำหรับวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

Mathematics and Statistics for Science and Technology



เอกสารโสตทัศน์ชุดวิชา คณิตศาสตร์และสถิติสำหรับวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี การสอนเสริมครั้งที่ 1
จัดทำเพื่อเป็นบริการแก่อาจารย์สอนเสริม

จัดทำต้นฉบับ : คณะกรรมการกลุ่มผลิตชุดวิชา

บรรณาธิการ/ออกแบบ : หน่วยผลิตสื่อสอนเสริม ศูนย์โสตทัศนศึกษา
สำนักเทคโนโลยีการศึกษา

จัดพิมพ์ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช

พิมพ์ที่ : โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช

พิมพ์ครั้งที่ 11 ภาค 1/2553 ปรับปรุง

เอกสารโสตทัศน์
ประกอบการสอนเสริม
ครั้งที่ 1

ชุดวิชา คณิตศาสตร์และสถิติสำหรับวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

หน่วยที่ 1–5

หน่วยที่ 1 ตรรกศาสตร์ เซต และระบบจำนวนจริง

หน่วยที่ 2 เรขาคณิตวิเคราะห์

หน่วยที่ 3 ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน ลำดับและอนุกรม

หน่วยที่ 4 ฟังก์ชันพีชคณิต และฟังก์ชันอดิศัย

หน่วยที่ 5 เมทริกซ์และดีเทอร์มินันต์

หน่วยที่ 1

ตรรกศาสตร์ เซตและระบบจำนวนจริง

- **ตรรกศาสตร์**
  - ประพจน์และการสร้างประพจน์
  - ประพจน์ที่สมมูลกันและสัจนิรันดร์
  - ข้อโต้แย้งที่สมเหตุสมผล
- **เซต**
  - ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเซต
  - การดำเนินการบนเซต
- **ระบบจำนวนจริง**
  - จำนวนจริงและเส้นจำนวน
  - สมบัติของจำนวนจริง
  - การแก้สมการ
  - การแก้อสมการ
  - ค่าสัมบูรณ์

โสตทัศน์ # 1.1 ประพจน์

ประพจน์ คือ ข้อความหรือประโยคที่บ่งบอกได้ว่าเป็นจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่ง

ใช้ p, q, r, s, t, … แทนประพจน์ และ T แทนค่าความจริง “เป็นจริง”
F แทนค่าความจริง “เป็นเท็จ”

1. จงพิจารณาว่าข้อใดเป็นประพจน์
    - 1.1 การสมัครเข้าเป็นนักศึกษาของมสธ. ต้องมีการสอบแข่งขัน
    - 1.2 $5 + 1 = 2$
    - 1.3 นักศึกษาควรอ่านเอกสารการสอนก่อนเข้ารับการสอนเสริม
    - 1.4 กรุงเทพเป็นเมืองหลวงของประเทศไทย
    - 1.5 $x - 3 = 0$

2. จงบอกค่าความเป็นจริงของประพจน์ในข้อ 1.

โสตทัศน์ # 1.2 นิเสธของประพจน์

ให้ p เป็นประพจน์

“นิเสธของ p” คือ “ไม่ใช่ p” ซึ่งเป็นประพจน์ใช้ “~p” แทน “นิเสธของ p”

1. จงเขียนนิเสธของประพจน์ต่อไปนี้
    - 1.1 วันนี้เป็นวันจันทร์
    - 1.2 กระเป๋าใบนี้สีแดง
    - 1.3 เด็กชายจุกหัวโล้น

โสตทัศน์ # 1.3 การสร้างประพจน์

1. การสร้างประพจน์ เป็น การนำประพจน์มาเชื่อมด้วยตัวเชื่อมแล้วได้ประพจน์ใหม่ โดยการใช้ตัวเชื่อม "นิเสธ", "และ", "หรือ", "ถ้า...แล้ว...", "ก็ต่อเมื่อ"

2. ถ้ามีประพจน์ 2 ประพจน์ คือ p และ q นำมาสร้างประพจน์ใหม่ด้วยตัวเชื่อม ค่าความจริงของประพจน์ใหม่จะมี 2 x 2 = 4 กรณี
   ถ้ามีประพจน์ 3 ประพจน์ คือ p, q และ r นำมาสร้างประพจน์ใหม่ด้วยตัวเชื่อม ค่าความจริงของประพจน์ใหม่จะมี 2 x 2 x 2 = 8 กรณี

โสตทัศน์ # 1.4 การสร้างประพจน์ด้วยตัวเชื่อม "และ"

ให้ p, q เป็นประพจน์
"p และ q" เป็นจริง เมื่อทั้ง p เป็นจริง และ q เป็นจริง กรณีอื่น ๆ เป็นเท็จ

แทน "p และ q" ด้วย "$p \wedge q$"

แสดงค่าความจริงของ $p \wedge q$ ด้วยตารางต่อไปนี้

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

จงหาค่าความจริงของประพจน์ $p \wedge q$, $\sim p \wedge q$, $\sim p \wedge \sim q$, $\sim(p \wedge q)$ และ $(p \wedge q) \wedge \sim p$

เมื่อ p แทนประพจน์ 2 + 3 = 6

q แทนประพจน์ 4 + 5 = 9

โสตทัศน์ # 1.5 การสร้างประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “หรือ”

ให้ p, q เป็นประพจน์
ประพจน์ “p หรือ q” เป็นเท็จเมื่อทั้ง p และ q เป็นเท็จ กรณีอื่น ๆ เป็นจริง

แทน “p หรือ q” ด้วย “p v q”

แสดงค่าความจริงของ p v q ด้วยตารางต่อไปนี้

p	q	p v q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

1. จงหาค่าความจริงของ p v q, ~p v q, ~p v ~q, ~(p v q)^q

   เมื่อ p คือ 1 + 1 = 2

   q คือ 2 + 3 = 6

โสตทัศน์ # 1.6 การสร้างประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “ถ้า...แล้ว..”

ให้ p, q เป็นประพจน์
ประพจน์ “ถ้า p และ q” เป็นเท็จ เมื่อ p เป็นจริง และ q เป็นเท็จกรณีอื่น ๆ เป็นจริง

แทน “ถ้า p แล้ว q” ด้วย “p→q”

แสดงค่าความจริงของ “p→q” ด้วยภาพต่อไปนี้

p	q	p→q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

โสตทัศน์ # 1.6 (ต่อ)

1. จงหาค่าความจริงของ $p \rightarrow q$, $\sim p \rightarrow q$, $\sim p \rightarrow \sim q$, $p \wedge (\sim p \rightarrow q)$ และ $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

   p คือ $1 + 1 = 2$

   q คือ $3 + 5 = 8$

2. ประพจน์ p และ q จากข้อ 1.

   2.1 จงหา $p \wedge (\sim p \rightarrow q)$

   2.2 จงหา $\sim p \rightarrow (p \vee q)$

โสตทัศน์ # 1.7 การสร้างประพจน์ด้วย “ก็ต่อเมื่อ”

ให้ p, q เป็นประพจน์
ประพจน์ “p ก็ต่อเมื่อ q” เป็นจริง เมื่อทั้ง p และ q มีค่าความจริงเหมือนกัน
และเป็นเท็จ ถ้าค่าความจริงต่างกัน

แทน “p ก็ต่อเมื่อ q” ด้วย $p \leftrightarrow q$

แสดงค่าความจริงของ “$p \leftrightarrow q$” ด้วยตารางต่อไปนี้

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

จงหาค่าความจริงของ $p \leftrightarrow q$, $\sim(p \rightarrow q)$, $\leftrightarrow(q \rightarrow \sim p)$, $p \leftrightarrow (q \wedge \sim p)$

โสตทัศน์ # 1.8 ประพจน์ที่สมมูลกัน

ประพจน์ที่สมมูลกัน คือ ประพจน์ที่มีค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี กรณีต่อกรณี

แทน "p สมมูลกับ q" ด้วย "$p \equiv q$"

จงพิจารณาว่าประพจน์ในข้อใดสมมูลกัน

1. $\sim(p \vee q)$ และ $\sim p \wedge \sim q$
2. $p \rightarrow q$ และ $\sim p \wedge q$
3. $p \vee q$ และ $p \wedge q$

โสตทัศน์ # 1.9 สัจนิรันดร์

สัจนิรันดร์ คือ ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี

เช่น $(p \wedge p) \rightarrow p$, $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ เป็นต้น

โสตทัศน์ # 1.10 ข้อโต้แย้งที่สมเหตุสมผล

กำหนดให้ประพจน์ $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ เป็นข้ออ้าง และประพจน์ C เป็นข้อสรุป จะกล่าวว่า **ข้อโต้แย้งนี้สมเหตุสมผล** ก็ต่อเมื่อ **$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow C$ เป็นสัจนิรันดร์**

1. จงพิจารณาว่าข้อโต้แย้งนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

   ข้ออ้าง $p \rightarrow q$

   ข้ออ้าง q

   ข้อสรุป p

2. จงพิจารณาว่าข้อโต้แย้งนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

   ข้ออ้าง 1 $P \vee q$

   ข้ออ้าง 2 $\sim q$

   ข้อสรุป p

โสตทัศน์ # 1.11 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเซต

ให้ A เป็นเซต และ a เป็นสมาชิกของเซต A
เขียนแทนด้วย $a \in A$
ถ้า b ไม่ใช่สมาชิกของ A
เขียนแทนด้วย $b \notin A$

โสตทัศน์ # 1.12 เอกภพสัมพัทธ์

เอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตที่กำหนดขอบเขตของเซตทั้งหมดภายใต้การพิจารณา

แทน "เอกภพสัมพัทธ์" ด้วย "U"

โสตทัศน์ # 1.13 การเขียนเซต

การเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก เช่น {1,2,3}, {1, 2, 3,...,100}, {1, 2, 3,...}
การเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไข เช่น {x | x เป็นจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง 3}
$\{x \in I^+ \mid 1 \leq x \leq 3\}$
{y | y เป็นนักศึกษา มสธ. ที่เข้ารับการสอนเสริม}

โสตทัศน์ # 1.14 เซตจำกัดและเซตอนันต์

1. S เป็นเซตจำกัด ถ้า S มีสมาชิกจำนวน n ตัว เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก หรือศูนย์
2. S เป็นเซตอนันต์ ถ้า S ไม่ใช่เซตจำกัด

เขียน n(S) แทน "จำนวนสมาชิกของ S"
เช่น S = {2, 5, 7, 10}
S มีสมาชิกจำนวน 4 ตัว
นั่นคือ n(S) = 4

โสตทัศน์ # 1.15 เซตว่าง

เซตว่าง คือเซตที่ไม่มีสมาชิกเลย

แทน "เซตว่าง" ด้วย "{ }" หรือ " ∅ "
เช่น A เป็นเซตของนกแก้วที่มี 10 ขา
A = { }

โสตทัศน์ #1.16 การเท่ากันของเซต

A และ B เป็นเซตสองเซต
A เท่ากับ B ก็ต่อเมื่อสมาชิกทั้งหมดของ A อยู่ใน B และสมาชิกทั้งหมดของ B อยู่ใน A

แทน "A เท่ากับ B" ด้วย "A = B"

ให้

A = {2, 4, 6}

B = {2, 2, 4, 6}

C = {1, 2, 3}

จงพิจารณาว่าข้อใดถูกต้อง

1. A = B
2. B = C
3. A = C

โสตทัศน์ #1.17 สับเซต

ให้ A และ B เป็นเซต
A เป็นสับเซตของ B ถ้าสมาชิกทุกตัวของ A อยู่ใน B

ใช้ " $\subseteq$ " แทน "เป็นสับเซตของ"

และ " $\nsubseteq$ " แทน "ไม่เป็นสับเซตของ"

โสตทัศน์ #1.17 (ต่อ)

เช่น $A \subseteq B$ หมายถึง A เป็นสับเซตของ B

$A \nsubseteq C$ หมายถึง A ไม่เป็นสับเซตของ C

<u>**หมายเหตุ**</u> เซตว่างเป็นสับเซตของทุกเซต

ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

1. $A \subseteq B$
2. $B \nsubseteq A$
3. $A \subseteq A$
4. $\varnothing \subseteq A$

โสตทัศน์ # 1.18 เพาเวอร์เซต

ให้ A เป็นเซตจำกัด
เพาเวอร์เซตของ A คือ เซตที่ประกอบด้วยสับเซตทั้งหมดของ A

แทน “เพาเวอร์เซตของ A” ด้วย P(A)

<u>ข้อสังเกตุ</u> ถ้า A มีสมาชิกจำนวน n ตัว
สับเซตทั้งหมดของ A มีจำนวน 2^n เซต

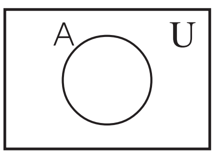
ให้ $A = \{1, 2\}$ $B = \{a, b, c\}$

1. สับเซตทั้งหมดของ A มีกี่เซต
2. สับเซตทั้งหมดของ B มีกี่เซต
3. จงหา P(A) และ P(B)

โสตทัศน์ # 1.19 แผนภาพเวนน์

แผนภาพเวนน์ คือ การใช้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแทนเอกภพสัมพัทธ์ ภายในสี่เหลี่ยมจะใช้รูปวงกลม วงรี หรือโค้งปิด แทนเซตที่เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์

เช่น $A \subseteq U$



โสตทัศน์ # 1.20 ยูเนียน

> ให้ A และ B เป็นเซต
> ยูเนียนของ A และ B คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน A และอยู่ใน B อย่างใดอย่างหนึ่งหรือสมาชิกที่อยู่ในทั้งสองเซต

ใช้ " $\cup$ " แทน "ยูเนียน"

เช่น "A ยูเนียน B" หรือ "ยูเนียนของ A และ B" เขียนแทนด้วย "$A \cup B$"

ให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$, $C = \{5, 6, 7, 8\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

จงหา $A \cup C$, $B \cup C$ และ $(A \cup B) \cup C$

โสตทัศน์ #1.21 อินเตอร์เซคชัน

> ให้ A และ B เป็นเซต
> อินเตอร์เซคชันของ A และ B คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ทั้งใน A และ B

ใช้ " $\cap$ " แทน "อินเตอร์เซคชัน"

เช่น "อินเตอร์เซคชันของ A และ B" หรือ "A อินเตอร์เซค B" แทนด้วย "$A \cap B$"

ให้ $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{5, 6\}$

$A \cap B = \{1, 2\}$

$A \cap C = \{\ \}$

จงหา $A \cap (B \cup C)$

โสตทัศน์ #1.22 ผลต่าง

ให้ A และ B เป็นเซต
ผลต่างของ A และ B คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน A แต่ไม่อยู่ใน B

ใช้ " – " แทน "ผลต่าง"

เช่น "ผลต่างของ A และ B" คือ "A – B" หรืออ่านว่า "A ลบ B"

ให้ $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{1, 3\}$

$A - B = \{4, 6\}$

$B - A = \{1, 3\}$

จงหา $A - C$, $B - C$, $(A \cap B) - C$, $A - (B \cup C)$

โสตทัศน์ # 1.23 คอมพลีเมนต์

ให้ $\mathbf{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ A เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์
คอมพลีเมนต์ของ A คือเซตที่อยู่ใน $\mathbf{U}$ แต่ไม่อยู่ใน A

ใช้ " A' " แทน "คอมพลีเมนต์ของ A"

เช่น $\mathbf{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$

$A' = \{2, 4\}$

$B' = \{5\}$

จงหา $(A \cup B)'$, $(A \cap B)'$, $\mathbf{U}'$, $\varnothing'$

โสตทัศน์ #1.24 การหาจำนวนสมาชิกของเซตที่กำหนดให้

กฎเบื้องต้นเกี่ยวกับการหาจำนวนสมาชิกของเซต

ให้ $\mathbf{U}$, A และ B เป็นเซตจำกัด, A และ B เป็นสับเซตของ $\mathbf{U}$

1. $n(A') = n(\mathbf{U}) - n(A)$
2. $n(A' \cap B) = n(B) - n(A \cap B)$
3. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

ให้ $\mathbf{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

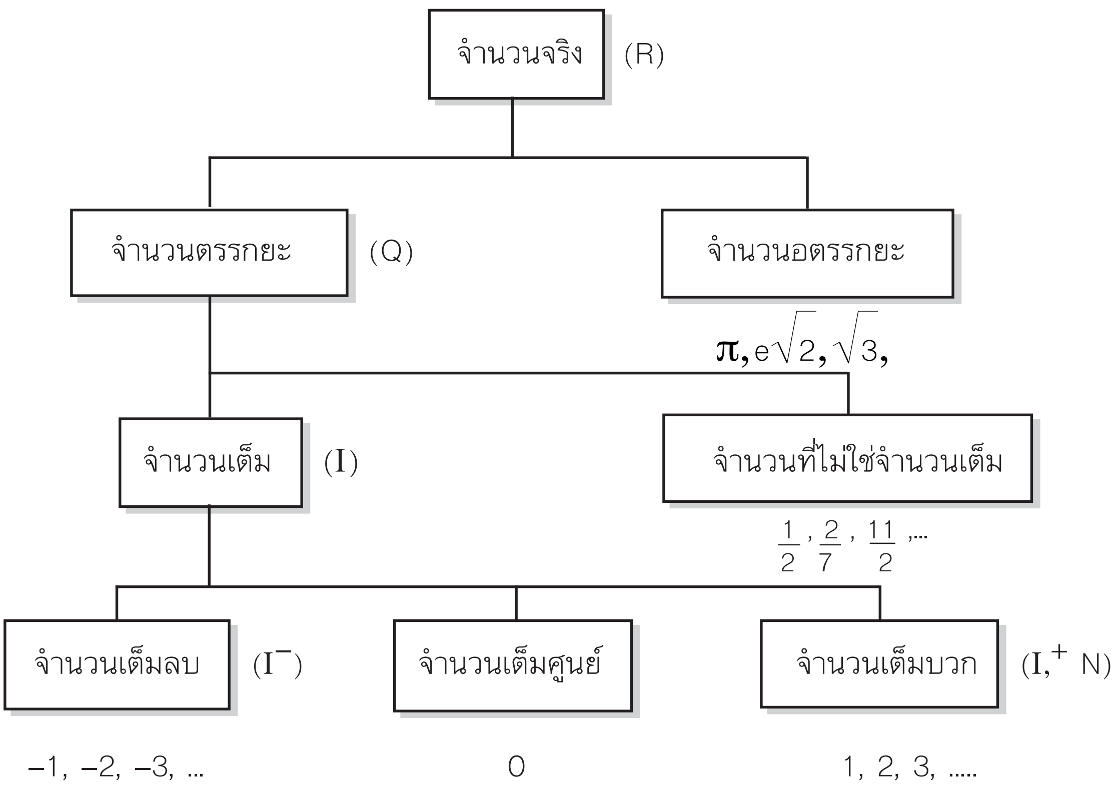
$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{3, 4, 5\}$

จงหา $n(A')$, $n(A' \cap B)$ และ $n(A \cup B)$

โสตทัศน์ #1.25 จำนวนจริง

<u>แผนภาพโครงสร้างของจำนวนจริง</u>



โสตทัศน์ # 1.26 การเขียนสับเซตของจำนวนจริงด้วยช่วงและเส้นจำนวน

1. **ช่วงปิด** คือ ช่วงที่รวมจำนวนแรกและจำนวนสุดท้าย

   $[a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$

2. **ช่วงเปิด** คือ ช่วงที่ไม่รวมจำนวนปลายสุด

   $(a, b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$

   $(-\infty, b) = \{x \in R \mid x < a\}$

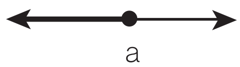
   $(b, \infty) = \{x \in R \mid x > b\}$

3. **ช่วงครึ่งเปิด** (หรือช่วงครึ่งปิด) คือ ช่วงที่รวมจำนวนปลายสุดข้างเดียว

   $(a, b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\}$

   $[a, b) = \{x \in R \mid a \leq x < b\}$

   $(-\infty, b) = \{x \in R \mid x \leq a\}$



   $[b, \infty) = \{x \in R \mid x \geq b\}$

จงหาค่าของ $(0, 2] \cap (1, 3)$, $[-1, 1] \cup [1, 2)$ และ $[-1, 1] \cap [1, 2)$

โสตทัศน์ # 1.27 การแก้สมการกำลังสอง

1. การแก้สมการคือการหาค่าตัวแปรที่สอดคล้องกับสมการ
2. การแก้สมการกำลังสองอาจทำได้โดยการแยกตัวประกอบ หรือใช้สูตร

ถ้า $ax^2 + bx + c = 0$, a และ b เป็นจำนวนจริง

สูตรการหาค่า x คือ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $b^2 - 4ac \geq 0$

จงแก้สมการต่อไปนี้ 1. $x^2 + 5x + 6 = 0$

2. $2x^2 - 9x - 5$

โสตทัศน์ # 1.28 การแก้อสมการกำลังสอง

1. การแก้อสมการคือการค่าตัวแปรที่สอดคล้องกับอสมการ
2. การแก้อสมการกำลังสองอาจอาศัยการแยกตัวประกอบ และใช้สมบัติดังนี้

2.1 ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ

I) $ab < 0$ หมายถึง 1) $a < 0$ และ $b > 0$ <u>หรือ</u> 2) $a > 0$ และ $b < 0$

II) $ab > 0$ หมายถึง 1) $a > 0$ และ $b > 0$ <u>หรือ</u> 2) $a < 0$ และ $b < 0$

2.2 ใช้เส้นจำนวน

จงแก้อสมการ 1) $(x - 1)(x + 3) > 0$

2) $x^2 + 7x + 10 \leq 0$

โสตทัศน์ # 1.29 ค่าสัมบูรณ์

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงใดๆ คือระยะห่างหรือระยะทางซึ่งจำนวนจริงนั้นอยู่ห่างจาก 0 ซึ่งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง a แทนด้วย $|a|$ ซึ่ง

$$|a| = \begin{cases} a & \text{ถ้า } a > 0 \\ 0 & \text{ถ้า } a = 0 \\ -a & \text{ถ้า } a < 0 \end{cases}$$

โสตทัศน์ # 1.30 สมการและอสมการที่อยู่ในรูปค่าสัมบูรณ์

ถ้ากำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์จะได้ว่า

1. $|x| = a$ หมายถึง $x = a$ หรือ $x = -a$
2. $|x| < a$ หมายถึง $-a < x < a$
3. $|x| > a$ หมายถึง $x < -a$ หรือ $x > a$

1. จงแก้สมการ $|2x - 3| = 1$
2. จงแก้อสมการ $|x + 2| < 4$
3. จงแก้อสมการ $|3x - 1| \geq 5$

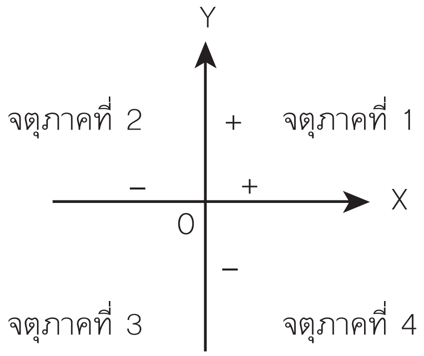
หน่วยที่ 2
เรขาคณิตวิเคราะห์

- **ระบบพิกัดฉากและระยะห่างระหว่างจุด**
  - ระบบพิกัดฉาก
  - การหาระยะห่างระหว่างจุด
- **เส้นตรง**
  - ความชันของเส้นตรง
  - สมการเส้นตรง
  - เส้นตรงที่ขนานกันหรือตั้งฉากกัน
- **ภาคตัดกรวย**
  - วงกลม
  - วงรี
  - ไฮเพอร์โบลา
  - พาราโบลา

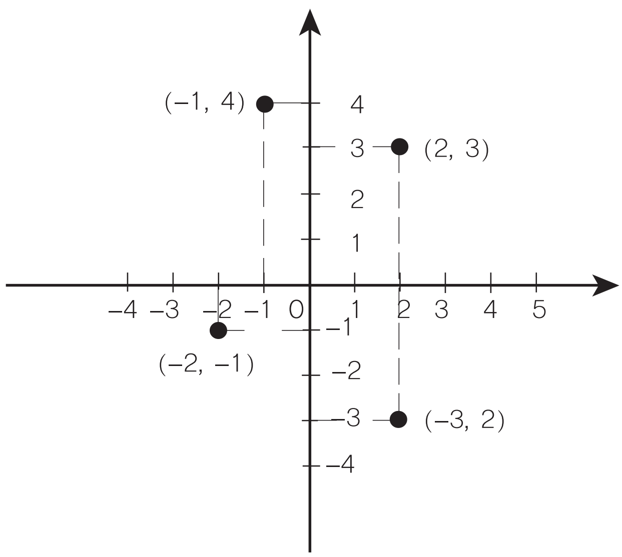
โสตทัศน์ # 2.1 ระบบพิกัดฉากสองมิติ

ระบบพิกัดฉากสองมิติหรือ R^2, (R x R) ประกอบด้วยเส้นจำนวนแนวนอนหนึ่งเส้น ซึ่งตัดกันเป็นมุมฉากกับเส้นจำนวนแนวตั้งอีกเส้นหนึ่งที่จุดกำเนิด (O) เรียกเส้นจำนวนแนวนอนว่าแกน X และเรียกเส้นจำนวนแนวตั้งว่าแกน Y เรียกระนาบนี้ว่า **ระนาบ XY**

แกน X และแกน Y แบ่งระนาบออกเป็น 4 ส่วน แต่ละส่วนเรียกว่า **จุตภาค** ดังรูป



การเขียนจุดต่อไปนี้ลงในระนาบ (2, 3), (–1, 4), (–2, –1), (–3, 2)

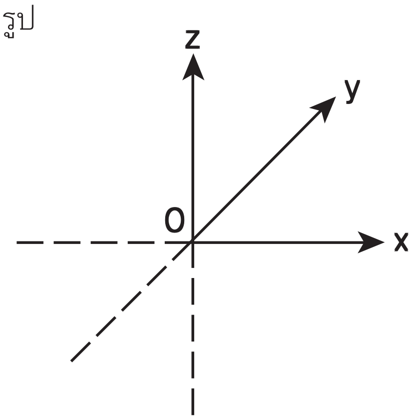


จงเขียนจุด (0, 1), (0, 0), (3, 1), (–1, 0), (–2, 4), (–4, 2) ลงบนระนาบ XY

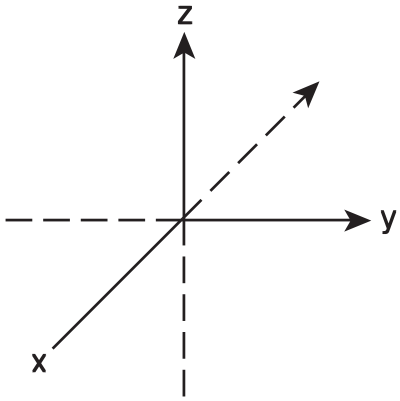
โสตทัศน์ # 2.2 ระบบพิกัดฉากสามมิติ

ระบบพิกัดฉากสามมิติหรือ R^3, (R x R x R) คือการเพิ่มแกน Z ตั้งฉากกับระนาบ XY และตัดกันที่จุดกำเนิด O การใส่หัวลูกศรบนแกน Z ให้ชี้ไปในทิศของค่าที่เป็นบวกบนแกน Z

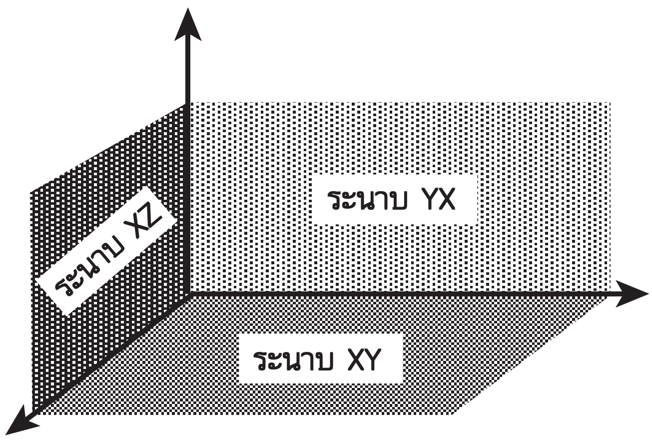
ดังรูป



หรือ



ระบบพิกัดฉากสามมิติประกอบด้วยระนาบ 3 ระนาบ คือ ระนาบ XY, XZ, และ YZ ดังรูปต่อไปนี้ ซึ่งแสดงแต่ละระนาบเฉพาะในทิศที่แทนค่าบวก



จุดในสามมิติเพื่อแทน**ไตรอันดับ**คือ (a, b, c) เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใช้วิธีการเดียวกับคู่อันดับ

จงเขียนจุด P_1, P_2, P_3 และ P_4

ในสามมิติแทนไตรอันดับ P_1(2, 1, 3), P_2(–3, –1, –2), P_3(1, –5, 0), P_4(0, 3, 1)

โสตทัศน์ # 2.3 การหาระยะห่างระหว่างจุด

1. ระยะห่างระหว่างจุด $P_1(x_1, y_1)$ กับจุด $P_2(x_2, y_2)$ บนระนาบ XY แทนด้วย $|P_1P_2|$

เมื่อ $|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

2. ระยะห่างระหว่างจุด $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ของพิกัดจาก 3 มิติ คือ

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

จงหาระยะห่างระหว่างจุด $P_1(2, 1)$ กับจุด $P_2(5, -3)$

โสตทัศน์ # 2.4 การหาพิกัดของจุดกึ่งกลาง

ถ้า $\overline{P}\ (\overline{x}, \overline{y})$ เป็นพิกัดของจุดซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $P_1(x_1, y_1)$ กับจุด $P_2(x_2, y_2)$ จะได้ว่า $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ และ $\overline{y} = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

จงหาพิกัดของจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่เชื่อมจุดต่อไปนี้

1. $P_1(2, 1)$ กับจุด $P_2(5, -3)$
2. $P_1(3, 2)$ กับจุด $P_2(3, 6)$
3. $P_1(1, 4)$ กับจุด $P_2(7, 4)$

โสตทัศน์ # 2.5 ความชันของเส้นตรง

ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และจุด $p_2(x_2, y_2)$ คือ m

เมื่อ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_1 \neq x_2$

1. ถ้าเส้นตรงขนานกับแกน X คือ $y_1 = y_2$ จะได้ว่า $m = 0$
2. ถ้าเส้นตรงขนานกับแกน Y (ตั้งฉากกับแกน X) คือ $x_1 = x_2$ ไม่นิยามความชัน หรือหาค่าความชันไม่ได้
3. ถ้าเส้นตรงทำมุมแหลมกับแกน X ความชันเป็นบวก, $m > 0$
4. ถ้าเส้นตรงทำมุมป้านกับแกน X ความชันเป็นลบ, $m < 0$

จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุดต่อไปนี้ และระบุว่าทำมุมแบบใดกับแกน X

1. $P_1(2, 3)$ กับจุด $P_2(-1, 5)$
2. $P_1(-1, -2)$ กับจุด $P_2(3, 5)$

โสตทัศน์ # 2.6 ความชันของเส้นตรงที่ขนานกัน

เส้นตรงที่ขนานกันจะมีความชันเท่ากัน ในทางกลับกันเส้นตรงที่มีความชันเท่ากันจะเป็นเส้นตรงที่ขนานกัน

จงแสดงว่าจุด 3 จุดที่กำหนดให้อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

1. จุด (4, 3) จุด (5, 8) และจุด (6, 12)
2. จุด (–3, 0) จุด (4, 1) และจุด (11, 2)

โสตทัศน์ # 2.7 ความชันของเส้นตรงที่ตั้งฉากกัน

ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่มีค่าความชันเป็น m_1 และ m_2 ตามลำดับโดยที่กล่าวว่า L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อ $m_1 \cdot m_2 = -1$

จงแสดงว่าเส้นตรงที่ผ่านจุด P_1 และจุด P_2 มีความสัมพันธ์กับเส้นตรงที่ผ่านจุด Q_1 และ Q_2 อย่างไร

1. จุด $P_1(3, -1)$ และจุด $P_2(-2, 5)$ กับจุด $Q_1(5, 0)$ และจุด $Q_2(-1, -5)$
2. จุด $P_1(3, -5)$ และจุด $P_2(6, -2)$ กับจุด $Q_1(5, -1)$ และจุด $Q_2(6, 0)$

โสตทัศน์ # 2.8 รูปแบบของสมการเส้นตรง

1. เส้นตรงซึ่งผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และมีความชันเป็น m จะมีสมการดังนี้

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

2. เส้นตรงซึ่งผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และจุด $P_2(x_2, y_2)$ จะมีสมการดังนี้

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

หรือ $$y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

3. เส้นตรงซึ่งมีความชันเป็น m และตัดกับแกน Y ที่จุด (0, b) จะมีสมการดังนี้

$$\boxed{y = mx + b}$$

เรียกค่า b ว่าเส้นตัดแกน Y

4. เส้นตรงซึ่งตัดกับแกน X ที่จุด (a, 0) และตัดกับแกน Y ที่จุด (0, b)

จะมีสมการเป็น $y = -\frac{b}{a}(x - a)$

หรือ $bx + ay = ab$

หรือ $$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

เรียกค่า a ว่าส่วนตัดแกน X

โสตทัศน์ # 2.8 (ต่อ)

1.จงหาสมการของเส้นตรงต่อไปนี้

1.1 ผ่านจุด (1, 2) และมีค่าความชันเป็น –3

1.2 เส้นผ่านจุด (7, 1) และจุด (4, –5)

2. จงหาความชันของสมการเส้นตรง $2y + 5x - 1 = 0$

โสตทัศน์ # 2.9 วงกลม

1. เซตของจุดบนระนาบ XY ที่เรียงกันเป็น**วงกลม** ประกอบด้วยจุดซึ่งมีเงื่อนไขว่าอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะคงที่เท่ากัน เรียกจุดคงที่นั้นว่า **จุดศูนย์กลาง**ของวงกลม และเรียกระยะคงที่ว่า **รัศมี**ของวงกลม

2. ถ้าจุด C(h, k) เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และ r เป็นรัศมีของวงกลมแล้ว จุด P(x, y) ที่อยู่บนวงกลมนี้จะต้องอยู่ห่างจากจุด C เป็นระยะ r หน่วย

จะได้ว่า $\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$

นั่นคือ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ **เป็นสมการของวงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) และรัศมียาว r**

3. ถ้าสมการของวงกลมอยู่ในรูป $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ เมื่อ A, B, C เป็นค่าคงตัว โดยการทำให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ คือ

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C$$

แล้วจะได้ว่าวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

โดยมีรัศมียาว $\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C}$ หรือ $\frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$

เมื่อ $A^2 + B^2 - 4C$ มีค่ามากกว่า 0

1. จงหาสมการของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (2, –1) และมีรัศมียาว 3

2. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมจากสมการวงกลม $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 12 = 0$

โสตทัศน์ # 2.10 วงรี

1. เซตของจุดบนระนาบ XY ที่เรียงกันเป็น **วงรี** ประกอบด้วยจุดซึ่งมีเงื่อนไขว่าผลบวกของระยะห่างจากจุดคงที่สองจุดเป็นค่าคงที่เท่ากัน เรียกจุดคงที่ทั้งสองนี้ว่า **จุดโฟกัส**

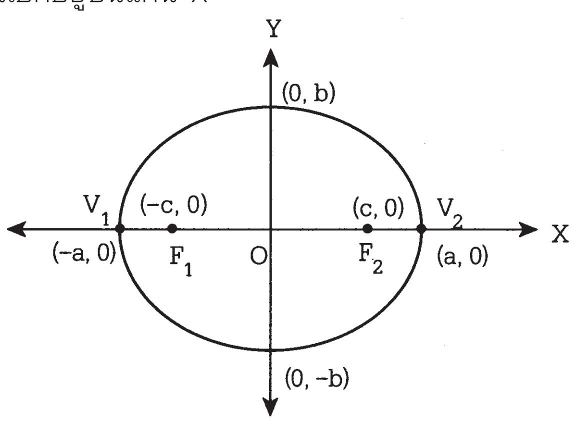
2. เส้นตรงซึ่งมีปลายทั้งสองอยู่บนวงรีและผ่านจุดโฟกัสทั้งสองของวงรีเรียกว่า **แกนเอก** ส่วนเส้นตรงซึ่งแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับแกนเอกของวงรีโดยมีปลายทั้งสองอยู่บนวงรี เรียกว่า **แกนโท** จุดที่แกนทั้งสองตัดกันเรียกว่า **จุดศูนย์กลางของวงรี**

3. จุดที่วงรีตัดกับแกนเอก เรียกว่า **จุดยอด**

4. การหาสมการของวงรีบนระนาบ XY มี 2 กรณี ดังนี้

   1. สมการวงรี จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนเอกอยู่บนแกน X

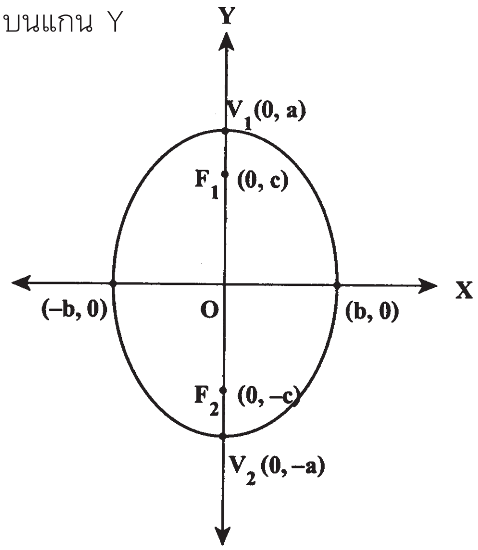
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{เมื่อ } a > b$$



พิกัดของจุดยอดอยู่ที่ $(-a, 0)$ และ $(a, 0)$
พิกัดของจุดโฟกัสอยู่ที่ $(-c, 0)$ และ $(c, 0)$
โดยที่ $c^2 = a^2 - b^2$

2. สมการวงรี จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนเอกอยู่บนแกน Y

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{เมื่อ } a > b$$



พิกัดของจุดยอดอยู่ที่ $(0, a)$ และ $(0, -a)$
พิกัดของจุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, c)$ และ $(0, -c)$
โดยที่ $c^2 = a^2 - b^2$

จงหาความยาวของแกนเอกและแกนโท หาจุดโฟกัสทั้งสองและหาจุดยอดทั้งสองของวงรีซึ่งมีสมการดังนี้

1. $2x^2 + 3y^2 = 10$
2. $5x^2 + 4y^2 = 16$

โสตทัศน์ # 2.11 ไฮเพอร์โบลา

เซตของจุดบนระนาบ XY ที่เรียงกันเป็นไฮเพอร์โบลา ประกอบด้วยจุดซึ่งมีเงื่อนไขว่าผลต่างของระยะห่างจากจุดคงที่สองจุดเป็นค่าคงที่เท่ากัน โดยที่ค่าคงที่นั้นเป็นค่าซึ่งมากกว่า 0 เรียกจุดคงที่ทั้งสองนั้นว่า **จุดโฟกัส**

การหาสมการไฮเพอร์โบลาบนระนาบ XY มี 2 กรณี ดังนี้

1. รูปมาตรฐานสมการไฮเพอร์โบลา จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0) และแกนขวางอยู่บนแกน X คือ

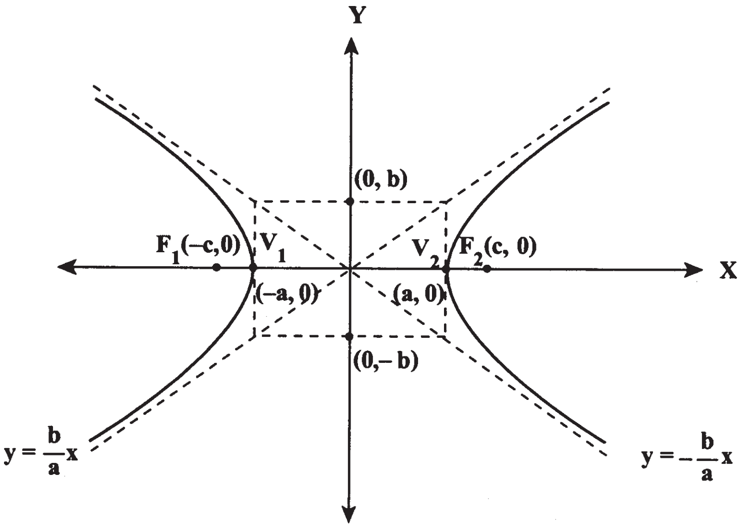
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

จุดยอดอยู่ที่ (–a, 0) และ (a, 0)

จุดโฟกัสอยู่ที่ (–c, 0) และ (c, 0)

โดยที่ $c^2 = a^2 + b^2$

สมการเส้นกำกับคือ $y = \pm \frac{b}{a} x$



2. รูปมาตรฐานสมการไฮเพอร์โบลา จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0) และแกนขวางอยู่บนแกน Y คือ

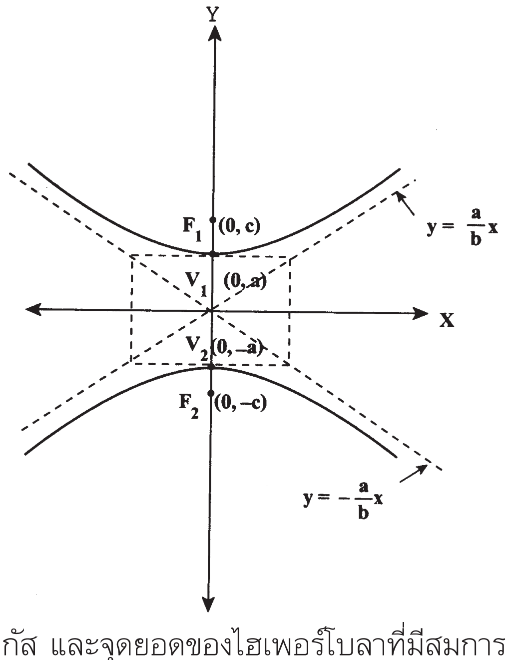
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

จุดยอดอยู่ที่ (0, a) และ (0, –a)

จุดโฟกัสอยู่ที่ (0, c) และ (0, –c)

โดยที่ $c^2 = a^2 + b^2$

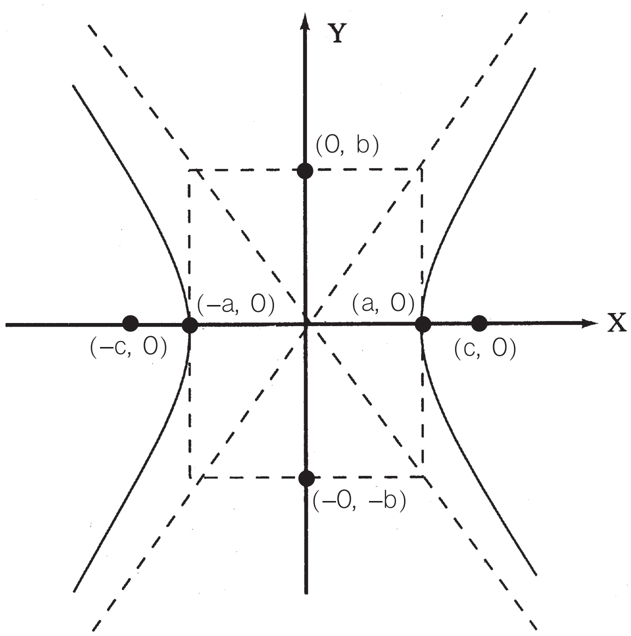
สมการเส้นกำกับคือ $y = \pm \frac{a}{b} x$



1. จงหาความยาวของแกนขวางและแกนสังยุค หาจุดโฟกัส และจุดยอดของไฮเพอร์โบลาที่มีสมการดังต่อไปนี้
   1.1 $9x^2 – 16y^2 – 144 = 0$
   1.2 $3x^2 – 2y^2 + 6 = 0$
2. จงหาสมการของไฮเพอร์โบลาซึ่งมีจุดยอด และจุดไฟกัสตามที่กำหนดให้ต่อไปนี้
   2.1 จุดยอดอยู่ที่จุด (–3, 0) กับจุด (3, 0) และจุดโฟกัสอยู่ที่จุด (–5, 0) กับจุด (5, 0)
   2.2 จุดยอดอยู่ที่จุด (0, –2) กับจุด (0, 2) และจุดโฟกัสอยู่ที่จุด (0, –4) กับจุด (0, 4)

โสตทัศน์ # 2.12 ข้อสังเกตของไฮเพอร์โบลา

ถ้าจุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลาอยู่บนแกน X จะได้รูป



ถ้าเขียนสี่เหลี่ยมผืนผ้าโดยลากเส้นสองเส้นผ่านจุด (0, b) (0, –b) ให้ขนานกับแกน X และลากเส้นผ่านจุดยอดทั้งสองของไฮเพอร์โบลาให้ขนานกับแกน Y อีกสองเส้น เรียกสี่เหลี่ยมที่ได้นี้ว่า **สี่เหลี่ยมกลาง** จะได้เส้นทแยงมุมทั้งสองของสี่เหลี่ยมกลางจะตัดกันที่จุดกำเนิด และมีความยาว 2c สมการเส้นทแยงมุมทั้งสองนี้ คือ $y = \frac{b}{a}x$ และ $y = \frac{-b}{a}x$ ถ้าต่อปลายทั้งสองของเส้นทแยงมุมแต่ละเส้นออกไป จะได้ว่าเส้นตรงทั้งสองอยู่ห่างจากไฮเพอร์โบลาน้อยลงทุกที เรียกเส้นตรงทั้งสองนี้ว่า **เส้นกำกับ**

ถ้าจุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลาอยู่บนแกน Y ก็มีแนวคิดเดียวกันเมื่อจุดโฟกัสอยู่บนแกน X

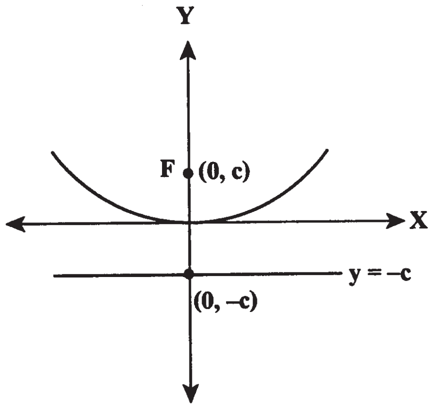
โสตทัศน์ # 2.13 พาราโบลา

เซตของจุดบนระนาบ XY ที่เรียงกันเป็น**พาราโบลา** ประกอบด้วยจุดซึ่งมีเงื่อนไขว่าอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งและเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่งเป็นระยะเท่ากัน เรียกจุดคงที่นั้นว่า**จุดโฟกัส** และเส้นตรงคงที่นั้นเรียกว่า **<u>เส้นไดเรกทริกซ์</u>**

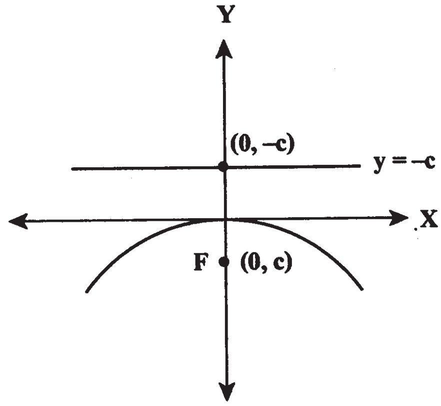
1. รูปมาตรฐานสมการพาลาโบลา จุดยอดที่ (0, 0) และแกน Y เป็นแกนสมการ

$$x^2 = 4cy$$

พิกัดของจุดโฟกัสที่ (0, c) และสมการเส้นไดเรกทริกซ์คือ y = –c



กรณี c > 0

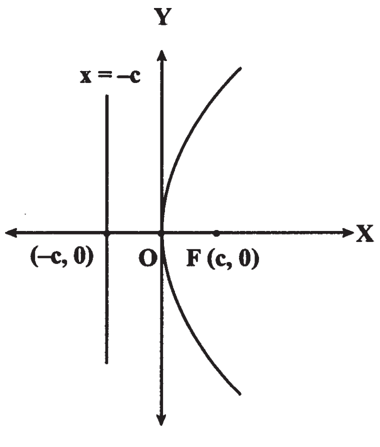


กรณี c < 0

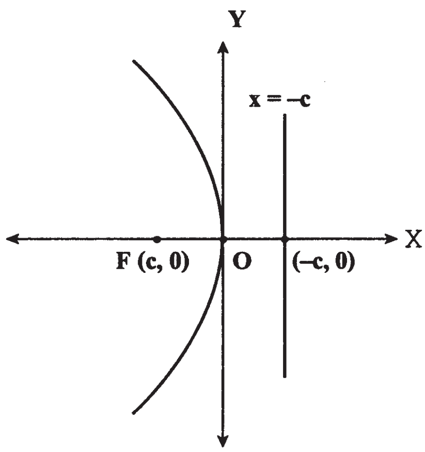
2. รูปมาตรฐานสมการพาลาโบลา จุดยอดที่ (0, 0) และแกน X เป็นแกนสมการ

$$y^2 = 4cx$$

พิกัดของจุดโฟกัสที่ (0, c) และสมการเส้นไดเรกทริกซ์คือ x = –c



กรณี c > 0



กรณี c < 0

จงหาจุดโฟกัส และสมการไดเรกทริกซ์ของพาราโบลาจากสมการต่อไปนี้

1. $x^2 = 4y$
2. $x^2 = -6y$
3. $y^2 = 2x$
4. $y^2 = -3x$

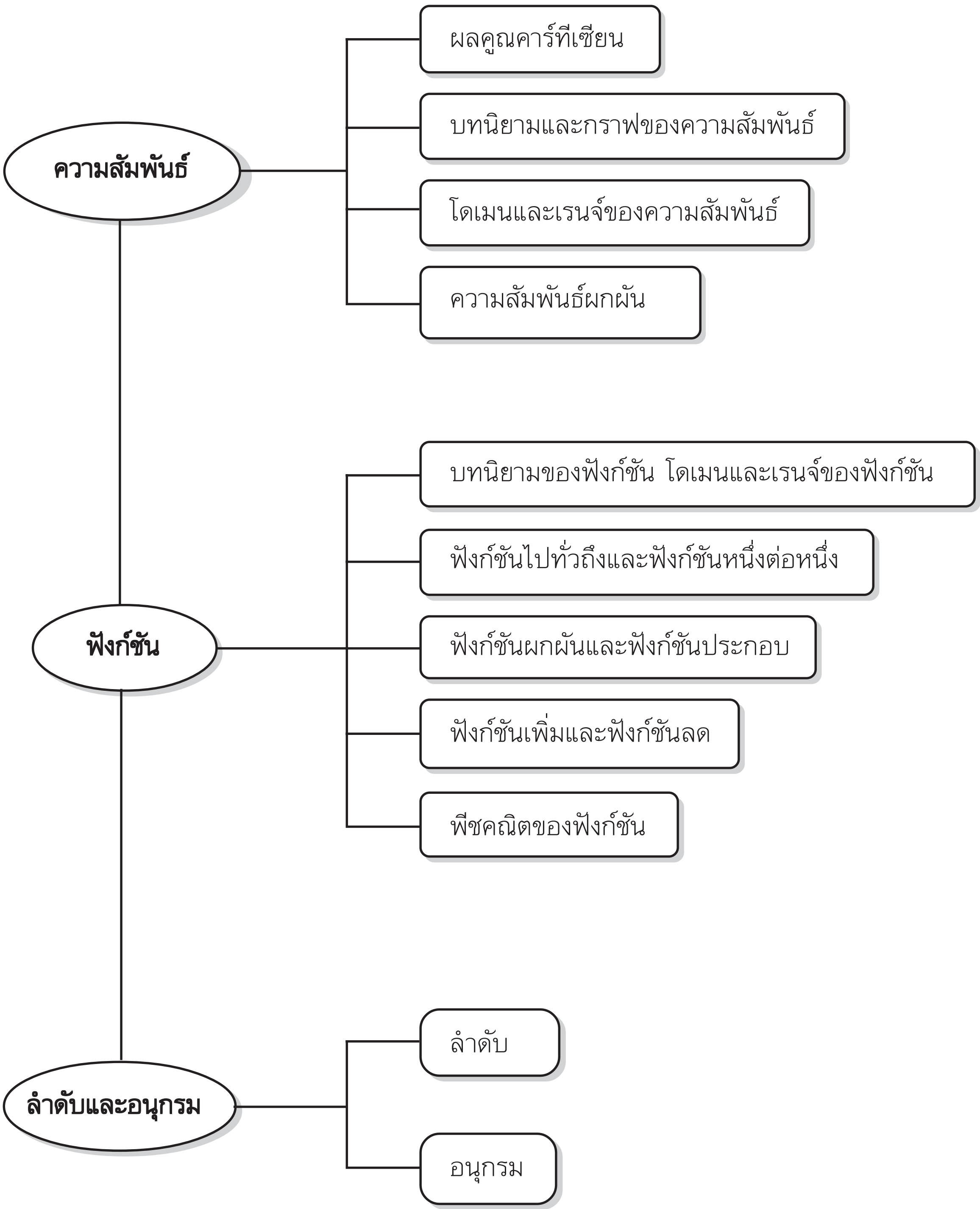
โสตทัศน์ # 2.14 แกนและจุดยอดของพาราโบลา

1. เส้นตรงที่ผ่านจุดโฟกัสของพาราโบลา และตั้งฉากกับเส้นไดเรกทริกซ์ของพาราโบลา เรียกว่า **แกนของพาราโบลา**

2. จุดที่พาราโบลาตัดกับแกนแกนของพาราโบลา เรียกว่า **จุดยอดของพาราโบลา**

จงหาสมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และมีเงื่อนไขดังนี้
1. จุดโฟกัสอยู่ที่ (0, 3)
2. เส้นไดเรกทริกซ์ คือ $x = 2$
3. ผ่านจุด (1, 2) และแกนอยู่บนแกน x
4. ผ่านจุด (1, 2) และแกนอยู่บนแกน y

หน่วยที่ 3
ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน ลำดับและอนุกรม



หน่วยที่ 3
ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน และอนุกรม

โสตทัศน์ # 3.1 ผลคูณคาร์ทีเซียน

1. **คู่อันดับ**

   สัญลักษณ์ (x, y) เรียกว่า **คู่อันดับ**

   (x, y) = (a, b) ก็ต่อเมื่อ x = a และ y = b

2. **ผลคูณคาร์ทีเซียน**

   ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ **ผลคูณคาร์ทีเซียน**ของ A และ B เขียนแทนด้วย A x B โดยที่

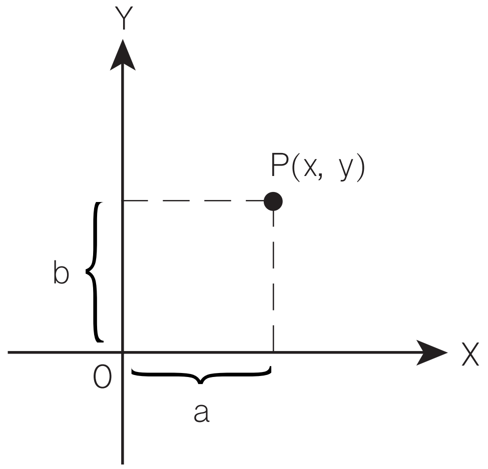
   $A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A$ และ $b \in B \}$

   เรียกระนาบที่แสดงพิกัดของคู่อันดับทั้งหมดของ A x B ว่า **ระนาบคาร์ทีเซียน**

3. **ระนาบ xy**

   ระนาบ xy หรือระนาบพิกัดฉาก เป็นระนาบที่แสดงกราฟของคู่อันดับ (a, b)

   เมื่อ $(a, b) \in R \times R$



โสตทัศน์ # 3.2 บทนิยามของความสัมพันธ์

ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ
r เป็น**ความสัมพันธ์จาก A ไป B** ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ A x B

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป A เรียก r ว่าเป็น**ความสัมพันธ์ใน A**

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B **กราฟของ r** คือ เซตของจุดในระนาบคาร์ทีเซียน ซึ่งมีพิกัดเป็น (x, y) สำหรับทุกๆ $(x, y) \in r$

โสตทัศน์ # 3.3 โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B
โดเมนของ r; $D_r = \{x \mid (x, y) \in r\}$
เรนจ์ของ r; $R_r = \{y \mid (x, y) \in r\}$

โสตทัศน์ # 3.4 ความสัมพันธ์ผกผัน

ให้ r เป็นความสัมพันธ์; $r = \{(x, y) \mid x \in A$ และ $y \in B\}$
ความสัมพันธ์ผกผันของ r; $r^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in r\}$
$D_{r^{-1}} = R_r$ และ $R_{r^{-1}} = D_r$

กิจกรรม 3.1

1. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,\}$

กำหนด $r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x + 1\}$

จงแจกแจงสมาชิกของ r, r^{-1} และหาโดเมน และเรนจ์ของ r และ r^{-1}

r = ______________________________

r^{-1} = ______________________________

D_r = ______________________________

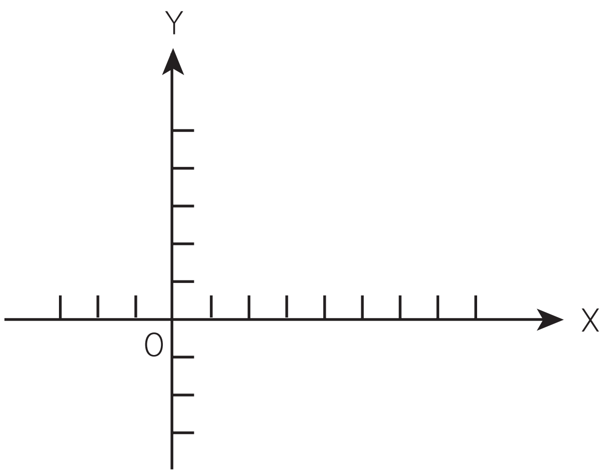
R_r = ______________________________

$D_{r^{-1}}$ = ______________________________

$R_{r^{-1}}$ = ______________________________

2. ให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2 + 1\}$

จงเขียนกราฟของ r และ r^{-1} พร้อมทั้งหาโดเมน และเรนจ์ของ r และ r^{-1}



โสตทัศน์ # 3.5 บทนิยามของฟังก์ชัน

ฟังก์ชัน f เป็นความสัมพันธ์ที่มีสมบัติเฉพาะว่า ถ้า (x, y) และ $(x, z) \in f$ แล้ว $y = z$

สามารถกล่าวได้ว่า ความสัมพันธ์ f **ไม่เป็นฟังก์ชัน**ก็ต่อเมื่อมี (x, y) และ $(x, z) \in f$ แต่ $\mathbf{y \neq z}$

อาจพิจารณาว่าความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชันหรือไม่ โดยพิจารณาหาจากกราฟของความสัมพันธ์นั้น

ถ้าไม่มีเส้นตั้งฉากกับแกน x ตัดกราฟของความสัมพันธ์มากกว่าหนึ่งจุดแล้วความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชัน

ถ้ามีเส้นตั้งฉากกับแกน x ตัดกราฟของความสัมพันธ์มากกว่าหนึ่งจุดแล้วความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชัน

โดเมนของฟังก์ชัน f; $D_f = \{x \mid (x, y) \in f\}$

เรนจ์ของฟังก์ชัน f; $R_f = \{y \mid (x, y) \in f\}$

<u>กิจกรรม 3.2</u>

1. จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ใน R ที่กำหนดต่อไปนี้ ความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชันบ้าง
   1. $\{(x, y) \mid x + 2y = 4\}$ ____________________
   2. $\{(x, y) \mid y = x^2 - 1\}$ ____________________
   3. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$ ____________________
   4. $\{(x, y) \mid y = 2\}$ ____________________
   5. $\{(x, y) \mid x = 2\}$ ____________________

2. จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันจากข้อ 1.

____

____

____

____

____

____

โสตทัศน์ # 3.6 ฟังก์ชันจาก A ไป B

f เป็นฟังก์ชันจาก **A ไป B** ก็ต่อเมื่อ $D_f = A$ และ $R_f \subseteq B$

เขียนแทนด้วย $f: A \rightarrow B$

f เป็นฟังก์ชันจาก **A ไปทั่วถึง B** ก็ต่อเมื่อ $D_f = A$ และ $R_f = B$

เขียนแทนด้วย $f: A \xrightarrow{\text{ทั่วถึง}} B$

ถ้า $f: A \rightarrow B$ และ f เป็นฟังก์ชัน**หนึ่งต่อหนึ่ง** ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x_1, y) \in f$ และ $(x_2, y) \in f$ แล้ว $x_1 = x_2$

เขียนแทนด้วย $f: A \xrightarrow[1-1]{} B$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B กล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

เขียนแทนด้วย $f: A \xrightarrow[1-1]{\text{ทั่วถึง}} B$

<u>กิจกรรม 3.3</u>

จงพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้ว่า ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันจาก R ไปทั่วถึง R
ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

1. $f = \{(x, y) \mid y = 3x + 1\}$ ______________________________
2. $f = \{(x, y) \mid y = x^2\}$ ______________________________
3. $f = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x}\}$ ______________________________
4. $f = \{(x, y) \mid y = 3\}$ ______________________________
5. $f = \{(x, y) \mid y = |x|\}$ ______________________________

โสตทัศน์ # 3.7 ฟังก์ชันผกผัน

ให้ f เป็นฟังก์ชัน ถ้าความสัมพันธ์ผกผันของ f คือ f^{-1} เป็นฟังก์ชัน เรียก f^{-1} ว่า **ฟังก์ชันผกผัน** ของ f และกล่าวว่า f มีฟังก์ชันผกผัน

<u>กิจกรรม 3.4</u>

1. ฟังก์ชันในข้อใดมีฟังก์ชันผกผัน

   1.1 $\{(x, y) \mid 2x = y + 6\}$

   1.2 $\{(x, y) \mid y = x^2\}$

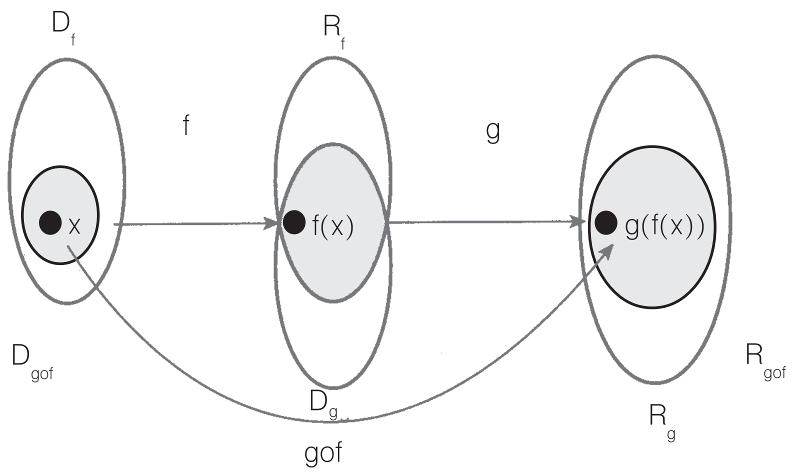
   1.3 $\{(x, y) \mid y = x^3\}$

   1.4 $\{(x, y) \mid y = 5\}$

โสตทัศน์ # 3.8 ฟังก์ชันประกอบ

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $R_f \cap D_g \neq \varnothing$
ฟังก์ชันประกอบ ของ f และ g เขียนแทนด้วย gof เป็นฟังก์ชันจาก
$\{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \}$ ไปยัง R_g ซึ่งกำหนดดังนี้

$$\boxed{gof(x) = g(f(x))}$$



<u>กิจกรรม 3.5</u>

1. ให้ $f(x) = 2x + 1$ และ $g(x) = \sqrt{x}$ จงหา

   1.1 gof(x)

   1.2 fog(x)

โสตทัศน์ # 3.9 ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

ให้ f เป็นฟังก์ชันจากสับเซตของ R ไป R โดยที่ $x_1 < x_2$ สำหรับทุก ๆ $x_1, x_2 \in D_f$

f เป็น**ฟังก์ชันเพิ่ม** ก็ต่อเมื่อ $f(x_1) < f(x_2)$

f เป็น**ฟังก์ชันลด** ก็ต่อเมื่อ $f(x_1) > f(x_2)$

กิจกรรม 3.6

1. ฟังก์ชันต่อไปนี้ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันลด

3.1 $f(x) = 2 - 3x$

3.2 $f(x) = 2x + 1$

3.3 $f(x) = x^2$

3.4 $f(x) = |x|$ เมื่อ $x < 0$

โสตทัศน์ # 3.10 พีชคณิตของฟังก์ชัน

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันจากสับเซตของ R ไป R
กำหนดพีชคณิตของฟังก์ชันดังนี้

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ โดยที่ $x \in D_f \cap D_g$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ โดยที่ $x \in D_f \cap D_g$ และ $g(x) \neq 0$

โสตทัศน์ # 3.11 ลำดับ

ฟังก์ชัน f เรียกว่าเป็นลำดับ ก็ต่อเมื่อ $D_f = \{1, 2, 3, ..., n\}$ เรียกว่า ลำดับจำกัด หรือ $D_f = I^+$ เรียกว่าลำดับอนันต์ นิยมเขียนลำดับโดยเขียนเฉพาะสมาชิกของเรนจ์ของลำดับ

$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$

ลำดับเลขคณิต คือ ลำดับที่ผลต่างของพจน์ที่ n + 1 ลบด้วยพจน์ที่ n มีค่าคงที่ เรียกผลต่างที่มีค่าคงที่นี้ว่า **ผลต่างร่วม (d)** หรือ $\mathbf{a_{n+1} - a_n = d}$

ลำดับเลขคณิตและอยู่ในรูป

$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \ldots, a_1 + (n-1)d, \ldots$

พจน์ทั่วไป

ลำดับเรขาคณิต คือ ลำดับที่อัตราส่วนของพจน์ที่ n + 1 ต่อพจน์ที่ n มีค่าคงที่

เรียก **อัตราส่วนร่วม (r)** หรือ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

ลำดับเรขาคณิตอยู่ในรูป

$a_1, a_1r, a_1r^2, \ldots, a_1r^{n-1}, \ldots$

พจน์ทั่วไป

กิจกรรม 3.5

1. จงเขียน 4 พจน์แรกของลำดับต่อไปนี้

   1.1 $\{4 - 3n\}$: ____________________

   1.2 $\{3(\frac{1}{2})^{n-1}\}$: ____________________

2. จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับต่อไปนี้

   2.1 ลำดับเลขคณิต $1, 5, 9, \ldots$ ____________________

   2.2 ลำดับเรขาคณิต $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ ____________________

3. จงหาพจน์ที่ 10 ของลำดับในข้อ 2

   3.1 ____________________

   3.2 ____________________

โสตทัศน์ # 3.12 อนุกรม

กำหนดลำดับ $\{a_n\}$ เรียก $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ว่า **อนุกรมจำกัด** เขียนแทนด้วย $\sum_{k=1}^{n} a_k$

และเรียก $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ ว่า **อนุกรมอนันต์** เขียนแทนด้วย $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

อนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต $\{ a_1 + (n-1)d \}$ เรียกว่า **อนุกรมเลขคณิต**

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right) \quad \text{หรือ} \quad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

อนุกรมที่ได้จากลำดับเรขาคณิต $\{ a_1 r^{n-1} \}$ เรียกว่า อนุกรมเรขาคณิต

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} \quad \text{เมื่อ} \quad r \neq 1$$

<u>กิจกรรม 3.8</u>

1. จงหาค่าของอนุกรมต่อไปนี้

   1.1 $\sum_{k=1}^{4} (2-3k) =$

   1.2 $\sum_{k=1}^{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} =$

2. เมื่อปล่อยลูกบอลจากตึกสูง 9 เมตร ให้ตกลงสู่พื้นราบลูกบอลจะกระดอนขึ้นสูง $\frac{2}{3}$ ของความสูงที่ลูกบอลตกลงมาโดยสม่ำเสมอ ถ้าปล่อยให้ลูกกระดอนขึ้นเป็นครั้งที่ 5 ลูกบอลจะกระดอนขึ้นสูงจากพื้นเท่าไร และจะหาระยะทางที่ลูกบอลนี้เคลื่อนที่

หน่วยที่ 4
ฟังก์ชันพีชคณิตและฟังก์ชันอดิศัย

- **ฟังก์ชันพีชคณิต**
  - ฟังก์ชันพหุนามและฟังก์ชันตรรกยะ
    - ฟังก์ชันพหุนาม
    - ฟังก์ชันตรรกยะ
- **ฟังก์ชันอดิศัย**
  - ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม
    - ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล
    - ฟังก์ชันลอการิทึม
  - ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

โสตทัศน์ # 4.1

ฟังก์ชันพหุนาม p คือฟังก์ชันจาก R ไป R โดยที่

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์

$a_n, a_{n-1}, \dots , a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง

ถ้า $a_n \neq 0$ เรียกจำนวนเต็ม n ว่า ดีกรีของฟังก์ชันพหุนาม p

กิจกรรม 4.1 ข้อใดคือฟังก์ชันพหุนามดีกรี 3 (อภิปรายร่วมกันและบอกเหตุผลของการคิด)

ก. $p(x) = 3x^2+1$

ข. $g(x) = \sqrt{3x+1}$

ค. $f(x) = (3x+1)^3$

ง. $g(x) = \sqrt{(x+1)^3}$

โสตทัศน์ # 4.2 การหารพหุนาม

ถ้า p และ d เป็นฟังก์ชันพหุนาม โดยที่ d ไม่ใช่พหุนามศูนย์
จะมีฟังก์ชันพหุนาม q และ r เพียงคู่เดียว ซึ่ง

$$p = qd + r$$

โดยที่ r เป็นพหุนามศูนย์ หรือ r มีดีกรีน้อยกว่าดีกรีของ d
ถ้าหาร p ด้วย d จะเรียก q ว่า **ผลหาร** และเรียก r ว่า **เศษ**

กิจกรรม 4.2

จงแสดงขั้นตอนการหาร $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 7$ ด้วย $d(x) = x - 1$
แล้วเขียน p(x) ให้อยู่ในรูป

$$p(x) = q(x)d(x) + r(x)$$

พร้อมทั้งระบุ ผลหาร และเศษที่ได้
พหุนาม r(x) ที่เป็นเศษ มีความสัมพันธ์อย่างไรกับพหุนาม d(x)

โสตทัศน์ # 4.3 ทฤษฎีบทเศษเหลือ

ถ้า p เป็นฟังก์ชันพหุนาม และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ
จะได้ว่า p(c) คือเศษ เมื่อหาร p ด้วย $x - c$

กิจกรรม 4.3

จงหาเศษจากการหาร $p(x) = 6x^3 - x^2 - 21x + 10$ ด้วย $d(x) = 2x - 1$

1) มีวิธีคิดได้กี่แบบ
2) ถ้าจะนำทฤษฎีบทเศษเหลือมาใช้ จะทำอย่างไร
3) ทฤษฎีบทเศษเหลือมีประโยชน์อย่างไร
4) การที่ได้เศษจากการหารเป็นศูนย์หมายความว่าอย่างไร

โสตทัศน์ # 4.4 ทฤษฎีบทตัวประกอบ

จำนวนจริง c เป็นศูนย์ของฟังก์ชันพหุนาม p(x) ก็ต่อเมื่อ p(c) = 0

จำนวนจริง c เป็นคำตอบของสมการพหุนาม p(x) = 0
ก็ต่อเมื่อ x – c เป็นตัวประกอบของ p

กิจกรรม 4.4

ข้อใดเป็นตัวประกอบของ $p(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24$

ก. $3x - 1$

ข. $3x + 1$

ค. $x + 3$

ง. $x - 3$

โสตทัศน์ # 4.5

ฟังก์ชันพหุนาม $q(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$
เรียกว่า ฟังก์ชันควอดราติก มีศูนย์ของพหุนาม 2 ค่า คือ

$$\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{และ} \quad \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

เมื่อ $D = b^2 - 4ac$

กิจกรรม 4.5

จงหาศูนย์ของพหุนาม $q(x) = x^2 - 2x - 1$

โสตทัศน์ # 4.6 ฟังก์ชันตรรกยะ

ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันตรรกยะ ก็ต่อเมื่อ $f = \frac{p}{q}$

โดยที่ p และ q เป็นฟังก์ชันพหุนามและ $q \neq 0$

กิจกรรม 3.4

กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x - 2}$ จงตอบคำถามต่อไปนี้

1) f เป็นฟังก์ชันตรรกยะใช่หรือไม่ เพราะเหตุใด
2) โดเมนของ f คืออะไร
3) เปลี่ยนรูปของ f ให้ง่ายขึ้นได้หรือไม่ ถ้าได้จงแสดงวิธีหา
4) ฟังก์ชันตรรกยะคือฟังก์ชันพหุนาม สรุปอย่างนี้ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

โสตทัศน์ # 4.7 ฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียล

ฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียล

คือฟังก์ชันในรูป $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = a^x\}$ โดยที่ $a > 0$ และ $a \neq 1$

หรือเขียนในรูปสูตรกำหนดค่าของ f ที่ x ใด ๆ ดังนี้

$y = f(x) = a^x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$

กิจกรรม 4.7

ให้ $y = F(t) = 1{,}200(2^{0.1t})$

เป็นฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียลบอกความสัมพันธ์ของจำนวนผู้ป่วยโรคเอดส์ เมื่อเวลาผ่านไป t นับจากจุดเริ่มต้นที่ $t = 0$ แทน พ.ศ. 2537

จงตอบคำถามต่อไปนี้

1) จงหาค่าของ F(0) และแปลความหมายค่าที่ได้
2) จงหาค่าของ F(3) และแปลความหมายค่าที่ได้
3) ถ้า F(t) = 2,400 จงหาค่า t และแปลความหมายค่าที่ได้

โสตทัศน์ # 4.8 ฟังก์ชันลอการิทึม

ฟังก์ชันลอการิทึม คือ ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียล

$f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = a^x\}$ โดยที่ $a > 0$ และ $a \neq 1$

$f^{-1} = \{(x, y) \in R \times R \mid x = a^y\}$ โดยที่ $a > 0$ และ $a \neq 1$

เรียก f^{-1} ว่า ฟังก์ชันลอการิทึม

ถ้า y คือค่าของฟังก์ชัน f^{-1} ที่ x ใด ๆ

$$y = f^{-1}(x)$$

ใช้สัญลักษณ์ $\log_a$ แทน f^{-1}

จะได้ $y = \log_a x$

เป็นสูตรกำหนดค่าของฟังก์ชันลอการิทึมที่ x

กิจกรรม 4.8

จงหาฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียลต่อไปนี้

$y = 2^x$

$y = e^x$

$y = 10^x$

โสตทัศน์ # 4.9 กฎเกี่ยวกับลอการิทึม

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a M^r = r \log_a M$$

$b = a^{\log_a b}$ เมื่อ $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$

$\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ เมื่อ $a > 0$, $b > 0$ และ $a \neq 1$, $b \neq 1$

<u>กิจกรรม 4.9</u>

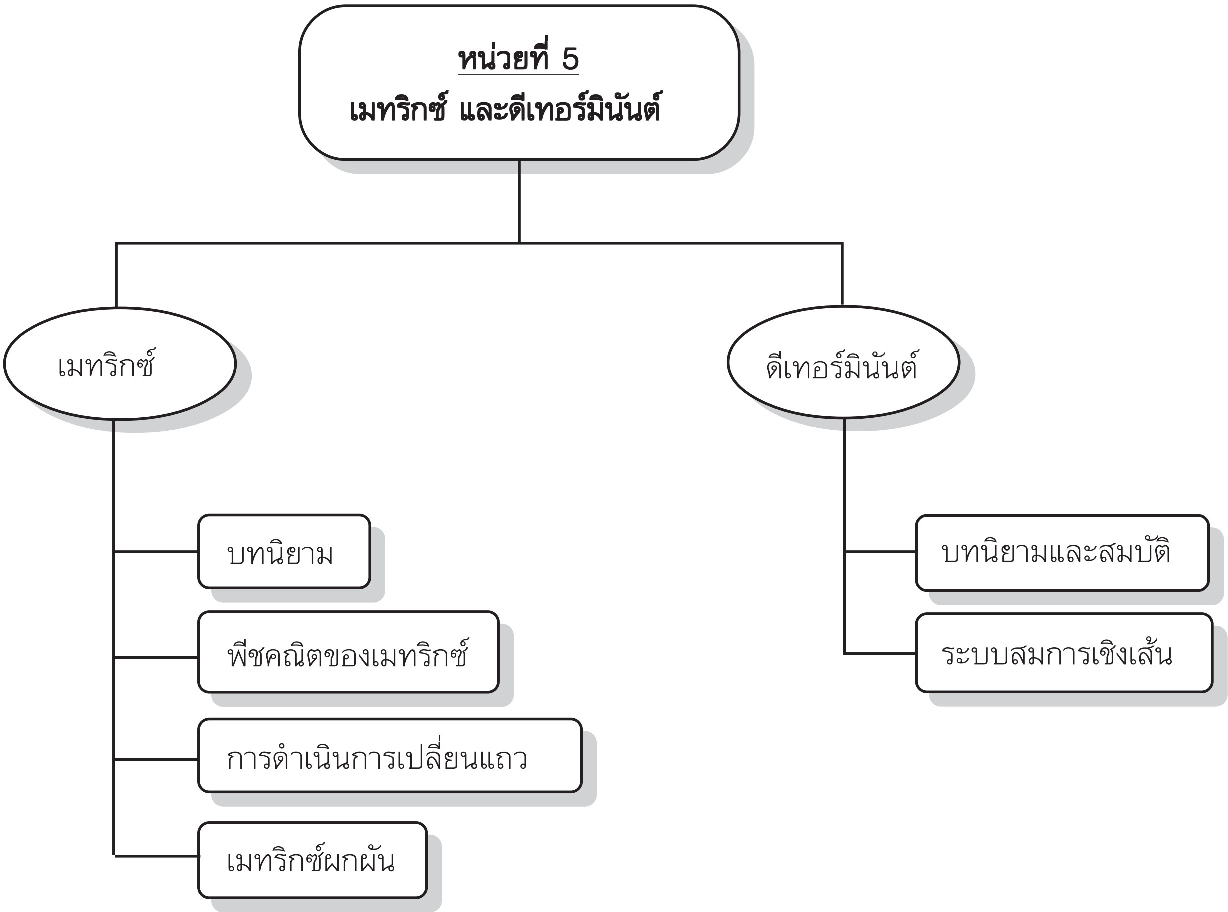
1. จงหาค่าต่อไปนี้

$\log_3 81 =$ ____________________

$\log_3 \left(\frac{1}{243}\right) =$ ____________________

$\log_{1/3} \left(\frac{1}{9}\right) =$ ____________________

2. จงหาค่า x เมื่อ $\frac{1}{2} \log_4 x = 2 \log_3 3 + \log_3 2 - \log_{10} 6$


หน่วยที่ 5
เมทริกซ์ และดีเทอร์มินันต์
เมทริกซ์
ดีเทอร์มินันต์
บทนิยาม
พีชคณิตของเมทริกซ์
การดำเนินการเปลี่ยนแถว
เมทริกซ์ผกผัน
บทนิยามและสมบัติ
ระบบสมการเชิงเส้น

โสตทัศน์ # 5.1 ความหมายของเมทริกซ์

กลุ่มของจำนวนซึ่งนำมาเขียนเรียงกันในกรอบสี่เหลี่ยมเป็นแถวนอนอย่างเป็นระเบียบ โดยที่แต่ละแถวนอน มีจำนวนอยู่เป็นจำนวนเท่ากัน เรียกว่า **เมทริกซ์** และเรียกแต่ละจำนวนว่า สมาชิกของเมทริกซ์

แทนเมทริกซ์ด้วยอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ A, B, C,.

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มี m แถวนอน และ n แถวตั้ง กล่าวว่า A มีขนาด m x n แทนด้วย $A = [a_{ij}]_{mxn}$
โดยที่ i แทนตำแหน่งแถวนอน และ j แทนตำแหน่งแถวตั้ง

โสตทัศน์ # 5.2 ทรานสโพสของเมทริกซ์

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด m x n แล้วทรานสโพสของ A แทนด้วย A^t เป็นเมทริกซ์ขนาด n x m
โดยที่ $a^t_{ij} = a_{ji}$ ทุกค่า i, j
หรือ A^t ได้จากการเขียนสมาชิกแต่ละแถวนอนของ A เป็นสมาชิกแต่ละแถวตั้ง

เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

โสตทัศน์ # 5.3 การบวกเมทริกซ์

ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด m x n แล้วผลบวกของ A + B = C
เมื่อ C จะเป็นเมทริกซ์ขนาด m x n โดยที่ $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ทุกค่า i, j
หรือ แต่ละสมาชิกของเมทริกซ์ผลบวกได้จากการนำสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันของเมทริกซ์ ที่นำมาบวกกัน

เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

โสตทัศน์ # 5.4 การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด m x n และ k เป็นจำนวนจริงแล้ว C = kA เป็นเมทริกซ์ขนาดเดียวกับ A ซึ่งได้จากการคูณสมาชิกทุก ๆ ตัวของ A ด้วยสเกลาร์ k

เช่น

$$\text{ถ้า } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{แล้ว } 5A = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{bmatrix}$$

เขียนแทน (–1)A ด้วย –A

โสตทัศน์ # 5.5 การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด m x n และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด n x p แล้ว
C = AB จะเป็นเมทริกซ์ขนาด m x p โดยที่

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

สำหรับ i = 1, 2, ..., m และ j = 1, 2, ..., p

เช่น

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)(4) + (0)(7) & (-1)(5) + (0)(8) & (-1)(6) + (0)(9) \\ (2)(4) + (3)(7) & (2)(5) + (3)(8) & (2)(6) + (3)(9) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -5 & -6 \\ 29 & 34 & 39 \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่าง</u>

$$\text{ถ้า } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จงหาว่า มี AB, BA, BC, CB, CD, DC และ C^tD หรือไม่ ถ้ามีจงหาผลคูณ ถ้าไม่มีจงบอกเหตุผล

โสตทัศน์ # 5.6 ดีเทอร์มินันต์

สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส A ขนาด n x n โดยที่ $n \geq 1$ จะมีจำนวนจริงจำนวนหนึ่งและจำนวนเดียวเท่านั้นที่จับคู่กับ A เรียกว่า ดีเทอร์มินันต์ของ A (เขียนแทนด้วย $|A|$) ตามข้อกำหนดดังนี้

1. ถ้า $A = [a]_{1x1}$ แล้ว $|A| = a$

2. ถ้า $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ แล้ว $\boxed{|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$

3. ถ้า $A = [a_{ij}]_{nxn}$ โดยที่ $n \geq 3$ แล้ว

$$\boxed{|A| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + a_{i3}C_{i3} + \dots + a_{in}C_{in} \text{ สำหรับ } i = 1, 2, \dots, n}$$

เมื่อ $C_{ij} = (-1)^{1+j} M_{ij}$ ทุกค่า i, j

โดยที่ M_{ij} คือ ดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์ซึ่งได้จาก A โดยการเอาแถวนอน i และแถวตั้ง j ออก

เรียก C_{ij} ว่า **โคแฟกเตอร์** ของ a_{ij}

เรียก M_{ij} ว่า **ไมเนอร์** ของ a_{ij}

หมายเหตุ ถ้า $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ หา $|A|$ โดยวิธีลัดดังนี้

$$|A| = \begin{array}{|ccc|cc} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & + & + & + \end{array} \begin{array}{l} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} \\ \quad - a_{31}a_{13}a_{22} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{array}$$

<ins>ตัวอย่าง</ins> จงหาดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

2. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ โดยใช้โคแฟกเตอร์ และโดยวิธีลัด

โสตทัศน์ # 5.7 สมบัติของดีเทอร์มินันต์

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ ขนาด n x n

1. $|A| = |A^t|$
2. ถ้าแถวนอนใด (หรือแถวตั้งใด) ของ A มีสมาชิกเป็น 0 ทั้งหมดแล้ว $|A| = 0$
3. ถ้าเมทริกซ์ B ได้จากเมทริกซ์ A โดยการสลับแถวนอน (หรือแถวตั้ง) คู่ใดคู่หนึ่ง แล้ว $|B| = -|A|$
4. ถ้าเมทริกซ์ B ได้จากเมทริกซ์ A โดยการคูณแถวนอนใดแถวนอนหนึ่ง (หรือแถวตั้งใดแถวตั้งหนึ่ง) ของ A ด้วยจำนวนจริง k แล้ว $|B| = k|A|$
5. ถ้าเมทริกซ์ B ได้จากเมทริกซ์ A โดยการบวกแถวนอนใดแถวนอนหนึ่ง (หรือแถวตั้งใดแถวตั้งหนึ่ง) ของ A ด้วย k คูณแถวนอนอีกแถวหนึ่ง (หรือแถวตั้งอีกแถวหนึ่ง) ของ A แล้ว $|B| = |A|$

โสตทัศน์ # 5.8 เมทริกซ์ของระบบสมการเชิงเส้น

ถ้ามีสมการเชิงเส้น 3 สมการและมีตัวแปร 3 ตัวแปร เช่น

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \text{..........(1)}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \text{...........(2)}$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \text{............(3)}$$

สามารถเขียนได้เป็น AX = B

เมื่อ A คือ เมทริกซ์ขนาด 3 x 3 โดยที่ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

X คือ เมทริกซ์ขนาด 3 x 1 โดยที่ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

และ B คือ เมทริกซ์ขนาด 3 x 1 โดยที่ $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

เรียก AX = B ว่า ระบบสมการเชิงเส้น 3 สมการ 3 ตัวแปร และเรียก A ว่าเมทริกซ์สัมประสิทธิ์

การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น หมายถึง การหาค่าของตัวแปรทั้ง 3 ตัวแปร ซึ่งสอดคล้องกับทั้ง 3 สมการ

วิธีการจากตัวอย่างนี้สามารถนำไปใช้กับสมการเชิงเส้น m สมการ โดยที่แต่ละสมการเกี่ยวข้องกับตัวแปร n ตัวแปร

โสตทัศน์ # 5.9 การดำเนินการกับแถวนอนของเมทริกซ์

การดำเนินการกับแถวนอนของเมทริกซ์ มี 3 อย่างดังนี้

1. การสลับแถวนอน i กับแถวนอน j แทนด้วย $R_i \leftrightarrow R_j$
2. การคูณแถวนอน i ด้วยจำนวนจริง $k \neq 0$ แทนด้วย $R_i \rightarrow kR_i$
3. แทนที่แถวนอน j ด้วย k เท่าของแถวนอน i บวกกับแถวนอน j
   แทนด้วย $R_j = kR_i + R_j$

เมทริกซ์ B ซึ่งได้จากเมทริกซ์ A โดยใช้การดำเนินการอย่างใดอย่างหนึ่งดังกล่าว เรียกว่าเป็นเมทริกซ์ซึ่งสมมูลกัน เขียนแทนด้วย $A \sim B$

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ B โดยที่ $A \sim B$ จากการดำเนินการดังนี้

1. $R_1 \leftrightarrow R_2$
2. $R_2 \rightarrow 4R_2$
3. $R_1 \rightarrow 4R_2 + R_1$

โสตทัศน์ # 5.10 เมทริกซ์แต่งเติม

สำหรับระบบสมการเชิงเส้น AX = B เมื่อ A มีขนาด m x n, X และ B มีขนาด n x 1

เรียกเมทริกซ์ [A : B] ที่มีขนาด m x (n+1) ว่า **เมทริกซ์แต่งเติม** และระบบสมการที่ได้จากการดำเนินการ 3 อย่างข้างต้น จะเป็นระบบสมการที่สมมูลกัน และมีคำตอบเดียวกัน

กำหนดให้ $3x_1 - x_2 = 0$

$-x_1 + x_2 = 1$

จงหา AX = B และเมทริกซ์แต่งเติม $[A : B] = \left[\begin{array}{cc:c} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$

โสตทัศน์ # 5.11 การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

สำหรับระบบสมการเชิงเส้น AX = B เมื่อ A มีขนาด m x m, X และ B มีขนาด m x 1 ในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นมีหลายวิธีในที่นี้จะหาจาก วิธีดังนี้

1. จากวิธีเกาส์–จอร์ดอง

เมทริกซ์แต่งเติม [A : B] โดยการดำเนินการกับแถว ถ้าสามารถจัดให้อยู่ในรูป [I : C]
เมื่อ I คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาดเดียวกับ A
แล้ว C คือ เมทริกซ์คำตอบ

ระบบสมการเชิงเส้นอาจมีคำตอบเดียว หรือมีคำตอบมากมาย หรือไม่มีคำตอบ

จงหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

1. $3x_1 + x_2 = 0$
   $-x_1 + x_2 = 1$

2. $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2$
   $2x_1 + 4x_3 = 2$
   $x_1 + 3x_2 - x_3 = -2$

2. จากกฎของคราเมอร์

1. หา $|A|$
2. ถ้า $|A| \neq 0$ แล้วจะหา $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ โดยที่

$x_i = \dfrac{|D_i|}{|A|}$ เมื่อ D_i คือเมทริกซ์ที่ได้จาก A โดยการแทนที่แถวตั้ง i ด้วย B (i = 1, 2, ..., m)

หมายเหตุ

1. ถ้า $|A| = 0$ โดยที่ $|D_i| \neq 0$ อย่างน้อยหนึ่งค่าแล้วจะได้ว่าระบบสมการ AX = B ไม่มีคำตอบ
2. ถ้า $|A| = 0$ โดยที่ $|D_i| = 0$ ทุกค่า i = 1, 2,..., m แล้วจะได้ว่าระบบสมการ AX = B มีหลายคำตอบ

คำถามท้ายหน่วยที่ 5

1. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

   จงหา $A + B$, $B + A$, $(A + B) + C$, $A + (B + C)$, $(A + B)^t$ และ $A^t + B^t$

2. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 5 \\ 3y & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & x \\ -1 & 8 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -3 \\ 0 & 2z \end{bmatrix}$

   จงหา x, y, z

3. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

   จงหา AB และ BA

4. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

   จงหา AB และ BA

5. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

   จงหา $|A|$, $|B|$ และ $|C|$

6. จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้วิธีของเกาส์ – จอร์ดอง และ กฎของคราเมอร์

   1) $2x_1 + x_2 = 5$
      $x_1 - x_2 = 6$

   2) $x_1 - x_2 = 1$
      $2x_1 - x_2 = 0$

   3) $x_1 + x_2 + x_3 = 3$
      $x_1 - x_2 + x_3 = 1$
      $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3$

   4) $x_1 - x_2 + x_3 = -5$
      $x_2 + x_3 = 3$
      $x_1 - x_3 = 2$