สาขาวิชาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช

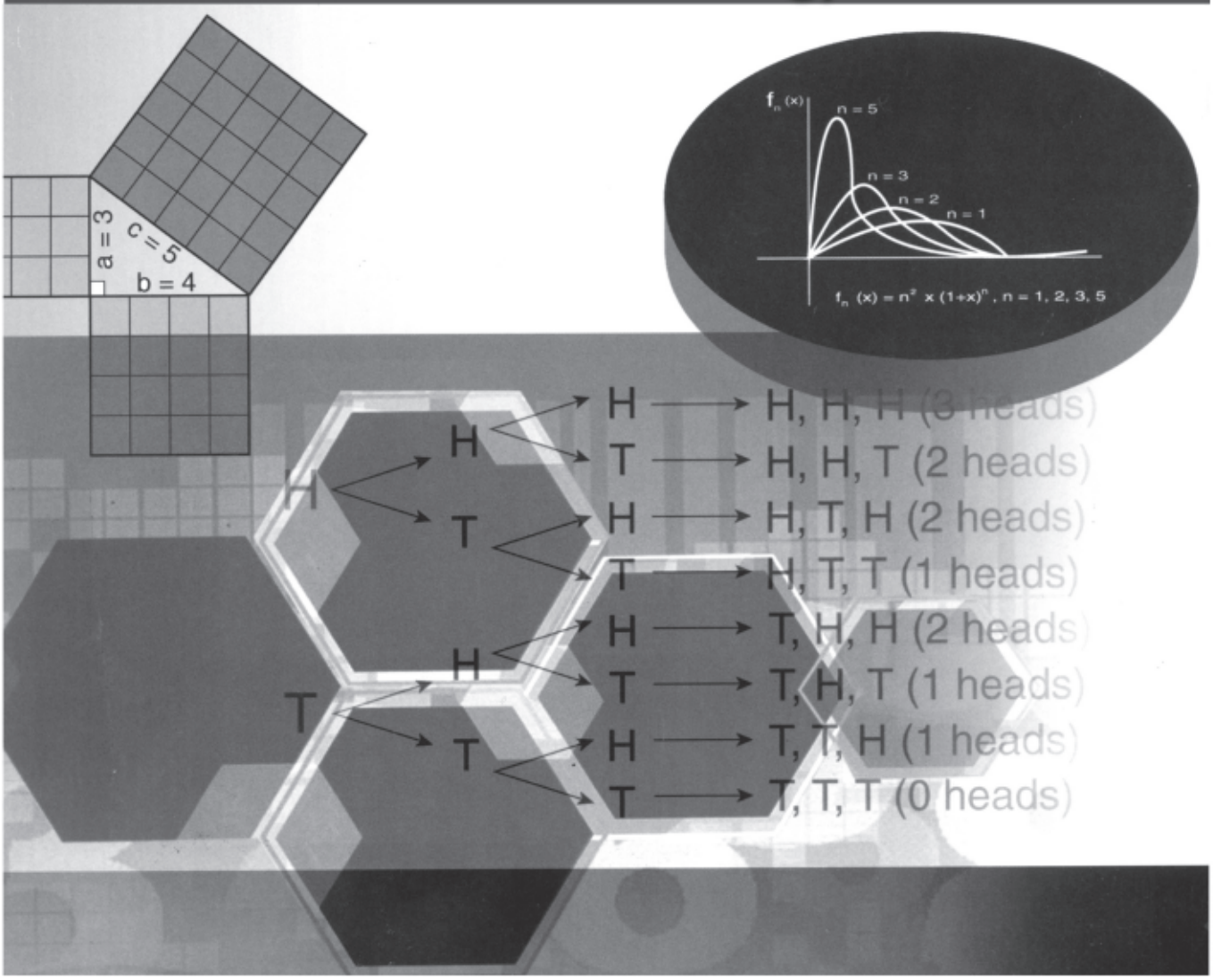
96102

การสอนเสริมครั้งที่ 2

เอกสารโสตทัศน์ชุดวิชา

คณิตศาสตร์และสถิติสำหรับวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

Mathematics and Statistics for Science and Technology



สงวนลิขสิทธิ์

เอกสารโสตทัศน์ชุดวิชา คณิตศาสตร์และสถิติสำหรับวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี การสอนเสริมครั้งที่ 2 จัดทำขึ้นเพื่อเป็นบริการแก่นักศึกษาในการสอนเสริม

จัดทำต้นฉบับ : คณะกรรมการกลุ่มผลิตชุดวิชา

บรรณาธิการ/ออกแบบ : หน่วยผลิตสื่อสอนเสริม ศูนย์โสตทัศนศึกษา
สำนักเทคโนโลยีการศึกษา

จัดพิมพ์ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช

พิมพ์ที่ : โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช

พิมพ์ครั้งที่ 10 ภาค 1/2553 ปรับปรุง

เอกสารโสตทัศน์
ประกอบการสอนเสริม
ครั้งที่ 2

ชุดวิชา คณิตศาสตร์และสถิติสำหรับวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

หน่วยที่ 6–10

หน่วยที่ 6 เวกเตอร์และการประยุกต์

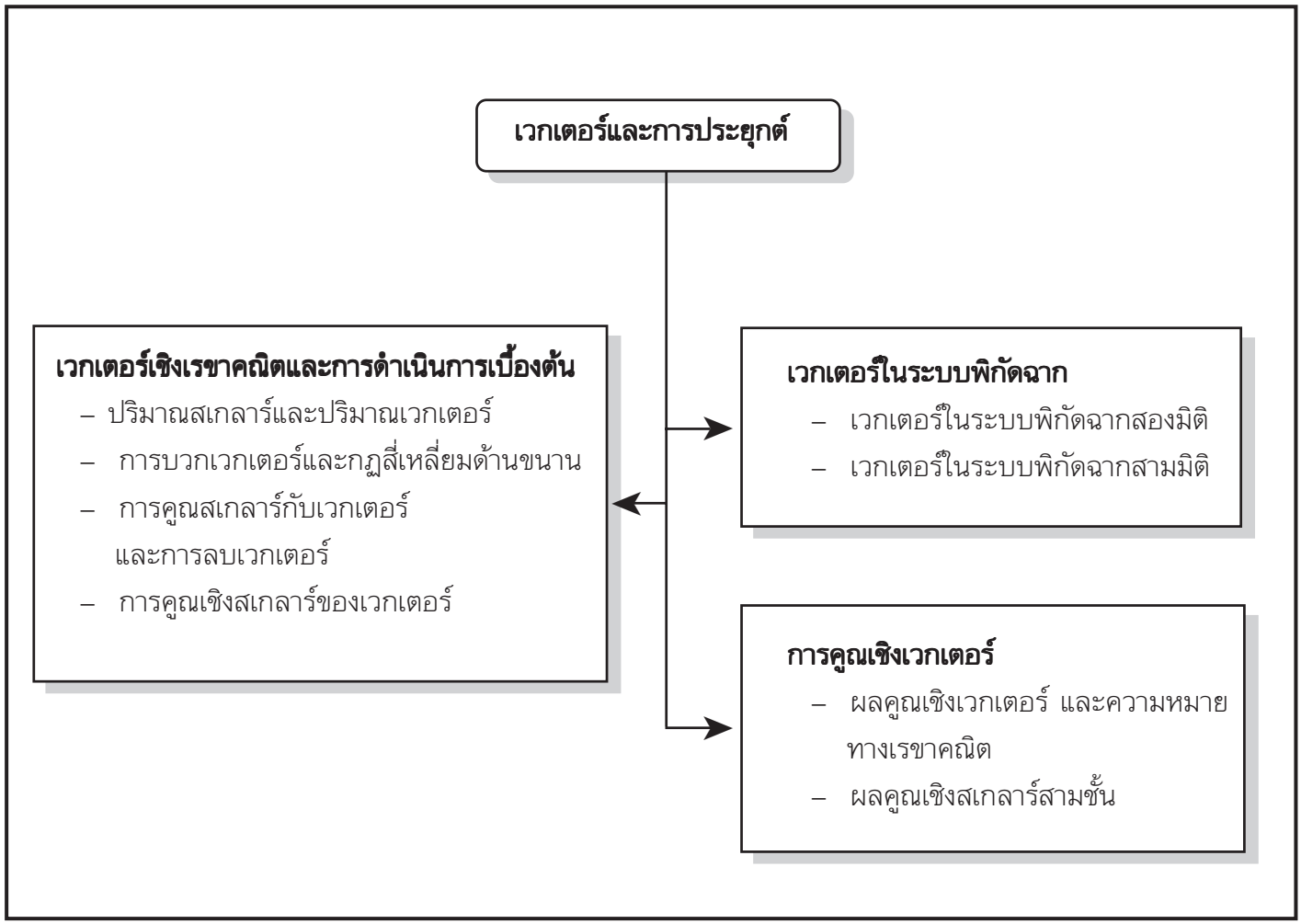
หน่วยที่ 7 อนุพันธ์และการประยุกต์

หน่วยที่ 8 อินทิกรัลและการประยุกต์

หน่วยที่ 9 การเรียงสับเปลี่ยน การจัดหมู่ และความน่าจะเป็น

หน่วยที่ 10 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับสถิติและสถิติพรรณนา

โสตทัศน์ # 6.1



โสตทัศน์ # 6.2 ปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์

ปริมาณทางกายภาพที่สามารถระบุขนาดหรือจำนวนหน่วยของปริมาณด้วยจำนวนจริงจำนวนหนึ่ง เรียกว่า **ปริมาณสเกลาร์** สำหรับปริมาณทางกายภาพอีกประเภทหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับทั้งขนาดและทิศทาง เรียกว่า **ปริมาณเวกเตอร์**

กิจกรรม

1. จงยกตัวอย่างของปริมาณสเกลาร์ .....
2. จงยกตัวอย่างของปริมาณเวกเตอร์ .....
3. จงยกตัวอย่างการเขียนเวกเตอร์เชิงเรขาคณิต .....
4. จงอธิบายบทนิยามต่อไปนี้

   การเท่ากันของเวกเตอร์ .....

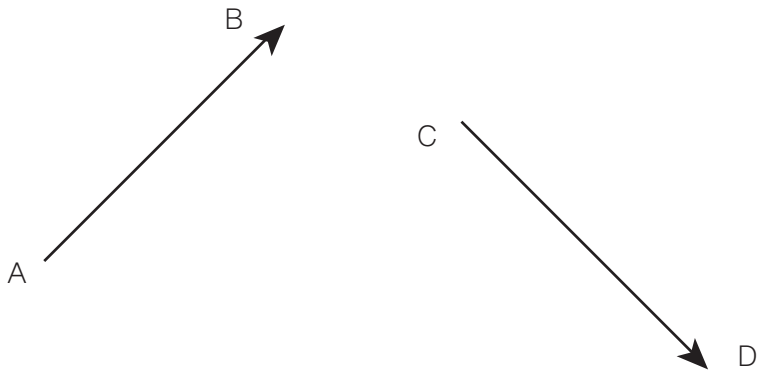
   เวกเตอร์ศูนย์ .....

   การขนานกันของเวกเตอร์ .....

   ขนาดของเวกเตอร์ .....

   เวกเตอร์หนึ่งหน่วย .....

โสตทัศน์ # 6.3 การดำเนินการเบื้องต้นของเวกเตอร์



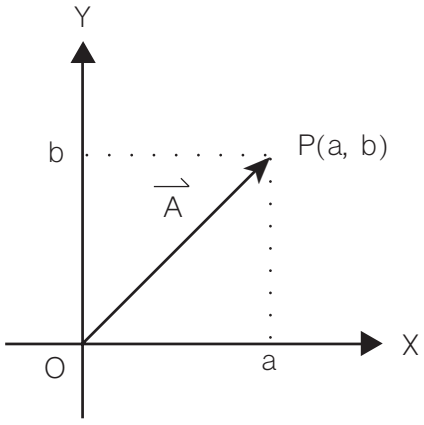
กิจกรรม

จากรูปที่กำหนด

1. จงหา $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ และ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$
2. การบวกเวกเตอร์เกี่ยวข้องกับกฎสี่เหลี่ยมด้านขนานอย่างไร .....
3. จงอธิบายความหมายของ $-2\overrightarrow{CD}$ .....
4. กำหนด ผลคูณเชิงสเกลาร์ ของ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}| \cos \theta$
   ถ้าผลคูณเชิงสเกลาร์ ของ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ จะมีความหมายอย่างไร
   .....
5. เราสามารถนำแนวคิดเกี่ยวกับเวกเตอร์เชิงเรขาคณิตไปประยุกต์ใช้ในด้านใดบ้าง อย่างไร
   .....

โสตทัศน์ # 6.4 เวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉากสองมิติ

จุด P(a, b) ใด ๆ บนระนาบในระบบพิกัดฉากสองมิติหรือใน $\mathbf{R}^2$ สามารถจับคู่แบบหนึ่งต่อหนึ่งกับเวกเตอร์เชิงเรขาคณิตซึ่งมีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด O และมีจุดปลายที่จุด P ดังนั้นจึงสามารถแทน เวกเตอร์ OP ด้วยคู่อันดับ (a, b) และเวกเตอร์เชิงเรขาคณิตทั้งหลายที่เท่ากับ เวกเตอร์ OP ก็สามารถแทนได้ด้วย คู่อันดับ (a, b) เช่นเดียวกัน



เราสามารถเขียน $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{A} = (a, b)$

โสตทัศน์ # 6.5 บทนิยามเกี่ยวกับ เวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉากสองมิติ

กิจกรรม

จงกล่าวถึง บทนิยามเกี่ยวกับเวกเตอร์ ในระบบพิกัดฉากสองมิติ หรือใน R^2 ต่อไปนี้

ขนาดของเวกเตอร์ $\overrightarrow{A} = (a, b)$ คือ .....

การเท่ากันของเวกเตอร์ $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ ก็ต่อเมื่อ .....

การคูณสเกลาร์กับเวกเตอร์ $m\overrightarrow{A} = m(a, b)$ = ...

ผลบวกและผลต่างของเวกเตอร์ $(a_1, b_1) + (a_2, b_2)$ = ...

$(a_1, b_1) - (a_2, b_2)$ = ...

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกันกับ $\overrightarrow{A}$ คือ

ผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ $(a_1, b_1)\cdot(a_2, b_2)$ = ...

เราสามารถเขียน $\overrightarrow{A} = (a, b) = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ เมื่อ $\overrightarrow{i}$ และ $\overrightarrow{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตามแนวแกน X และแนวแกน Y ตามลำดับ

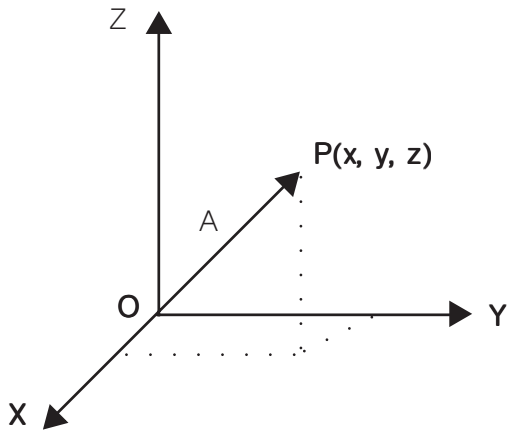
ให้ $\overrightarrow{A} = 6\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{B} = 4\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ และ $\overrightarrow{C} = 3\overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j}$ จงหา

1. ขนาดของ $\overrightarrow{A}$ = ...
2. $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$ = ...

   และ $\overrightarrow{B} - 2\overrightarrow{C}$ = ...
3. $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}$ = ...

   และ $\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{C}$ = ...
4. มุมระหว่างเวกเตอร์ $\overrightarrow{B}$ กับ $\overrightarrow{C}$ คือ .....

โสตทัศน์ # 6.6 เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ



เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติเป็นการขยายความคิดจากเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติสามารถแทนเวกเตอร์ OP ด้วยสามสิ่งอันดับ (x, y, z) และเวกเตอร์เชิงเรขาคณิตทั้งหลายที่เท่ากับ เวกเตอร์ OP ก็สามารถแทนได้ด้วย สามสิ่งอันดับ (x, y, z) เช่นเดียวกัน

เราสามารถเขียน $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{A} = (x, y, z)$

โสตทัศน์ # 6.6 (ต่อ)

กิจกรรม

จงกล่าวถึง บทนิยามเกี่ยวกับเวกเตอร์ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ หรือใน R^3 ต่อไปนี้

ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A} = (a, b, c)$ คือ .....

การเท่ากันของเวกเตอร์ $(a_1, b_1, c_1) = (a_2, b_2, c_2)$ ก็ต่อเมื่อ .....

การคูณสเกลาร์กับเวกเตอร์ $m\vec{A} = m(a, b, c) =$ .....

ผลบวกและผลต่างของเวกเตอร์ $(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) =$ .....

$(a_1, b_1, c_1) - (a_2, b_2, c_2) =$ .....

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกันกับ $\vec{A}$ คือ .....

ผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ $(a_1, b_1, c_1)\cdot(a_2, b_2, c_2) =$ .....

เราสามารถเขียน $\vec{A} = (a, b, c) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ เมื่อ $\vec{i}$, $\vec{j}$ และ $\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตามแนวแกน X แนวแกน Y และแนวแกน Z ตามลำดับ

กำหนด $\vec{A} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ และ $B = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$

1. จงหาขนาดของ $\vec{A}$ .....
2. จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกันกับ $\vec{A}$ .....
3. จงหา $\vec{A} + \vec{B}$ ..... และ $\vec{A} - 2\vec{B}$ .....
4. จงหา $\vec{A} \cdot \vec{B}$ .....
5. ถ้ากำหนด $\vec{C} = 8\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{C}$ ตั้งฉากกับ $\vec{A}$ หรือ $\vec{B}$ เพราะเหตุใด .....

โสตทัศน์ # 6.7 ผลคูณเชิงเวกเตอร์

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

กิจกรรม

จงอธิบายความหมายเชิงเรขาคณิต ของ $\vec{A} \times \vec{B}$ .....

$\vec{A} \times \vec{B}$ เกี่ยวข้องกับกฎมือขวาอย่างไร .....

จงอธิบายความหมายเชิงเรขาคณิต ของ $\vec{A} \times \vec{B}$ .....

โสตทัศน์ # 6.7 (ต่อ)

กำหนด $\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ และ $\vec{B} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ จงหา

1. $\vec{A} \times \vec{B}$ .....

2. พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็นด้านประชิด .....

3. พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มี $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็นด้านสองด้านที่ประชิดกัน .....

โสตทัศน์ # 6.8 ผลคูณเชิงสเกลาร์สามชั้น

$$[\vec{A}\ \vec{B}\ \vec{C}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

กิจกรรม

จงอธิบายความหมายของ $[\vec{A}\ \vec{B}\ \vec{C}]$ .....

กำหนด $\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{B} = \vec{i} + 4\vec{k}$ และ $C = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ จงหา

1. $[\vec{A}\ \vec{B}\ \vec{C}]$

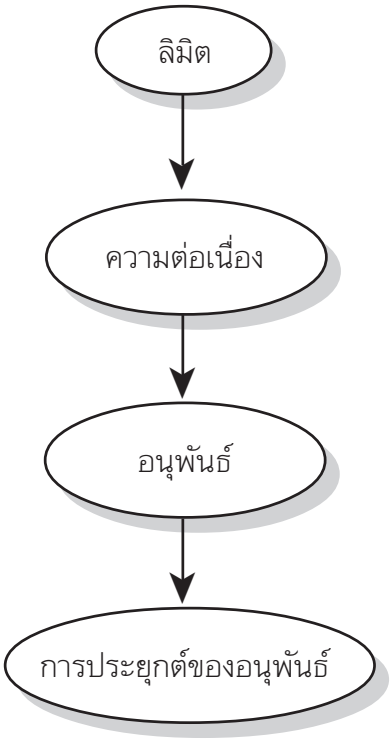
.....

.....

.....

2. จงหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนานที่กำหนดโดยเวกเตอร์ $\vec{A}$, $\vec{B}$ และ $\vec{C}$

หน่วยที่ 7
อนุพันธ์ และการประยุกต์

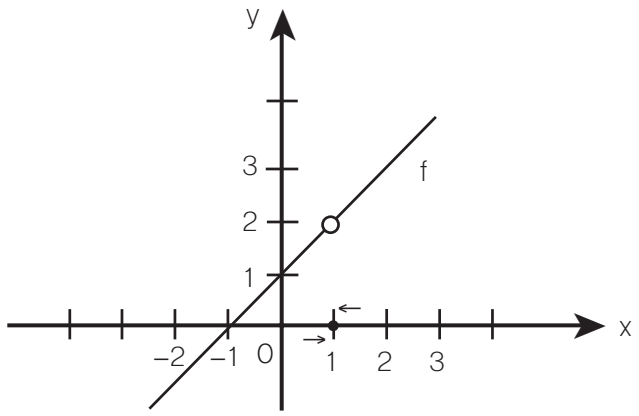


ประเด็นสำคัญ

1. หาลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
2. ระบุได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อเนื่องหรือไม่
3. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
4. หาอนุพันธ์ของฟังก์เอกซ์โปแนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึมได้
5. หาค่าสูงสุด หรือต่ำสุดของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

โสตทัศน์ # 7.1 ลิมิต

พิจารณาค่าของฟังก์ชัน f ซึ่งมีสูตรกำหนดโดย $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$



ประการแรกขอให้สังเกตว่า 1 ไม่อยู่ในโดเมนของ f และจากสูตรของ f จะเห็นได้ว่า

$$f(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1 \text{ สำหรับทุก ๆ } x \neq 1$$

จากผลลัพธ์นี้เราจะคำนวณหาค่า f(x) ที่ x มีค่าใกล้ ๆ 1 เพียงใดก็ได้ ดังตัวอย่างในตาราง

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	1	1.0001	1.001	1.01	1.1
f(x)	1.9	1.99	1.999	1.9999		2.0001	2.001	2.01	2.1

หาค่าไม่ได้

จากการคำนวณจะเห็นว่า ถ้า x ยิ่งเข้าใกล้ค่า 1 ทางซ้ายของ 1 ซึ่ง $x < 1$ และ x ยิ่งเข้าใกล้ 1 ทางด้านขวาของ 1 ซึ่ง $x > 1$ แล้ว ค่า f(x) ก็จะเข้าใกล้ค่า 2 เราเรียกค่า 2 ว่าเป็นค่าของ “ลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ 1” เขียนแสดงด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \quad \text{หรือ} \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

“x เข้าใกล้ 1 ทางด้านซ้ายของ 1 หรือ $x < 1$” แทนด้วย $x \to 1^-$

และ “ค่าของ f(x) เข้าใกล้ 2 เมื่อ $x \to 1^-$” แทนด้วย $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$

อ่านว่า ลิมิตทาง**ซ้าย**ของ f(x) เท่ากับ 2 เมื่อ x เข้าใกล้ 1

โสตทัศน์ # 7.1 (ต่อ)

ในทำนองเดียวกันสำหรับ

"x เข้าใกล้ 1 ทางด้านขวาของ 1 หรือ $x > 1$" แทนด้วย $x \to 1^+$

และ "ค่าของ f(x) เข้าใกล้ 2 เมื่อ $x \to 1^+$" แทนด้วย $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$

อ่านว่า ลิมิตทาง**ขวา**ของ f(x) เท่ากับ 2 เมื่อ x เข้าใกล้ 1

ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) = L$ แล้วย่อมได้ว่า

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \quad \text{และ} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

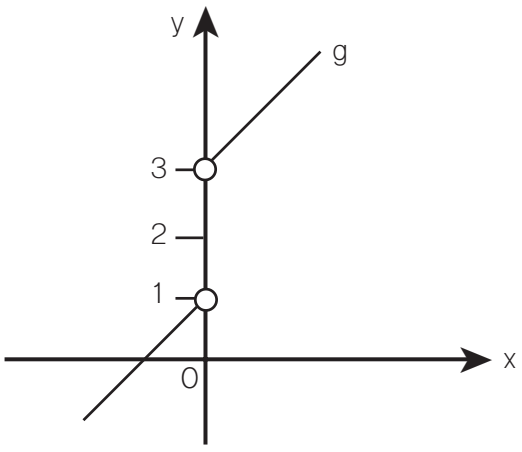
และในทางกลับกัน

ถ้าทั้ง $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ และ $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

เราย่อมได้ว่า $\lim_{x \to a} f(x) = L$

ถ้า $\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$ เราจะกล่าวว่า $\lim_{x \to a} f(x)$ ไม่มีค่า

ต่อไปพิจารณากราฟของฟังก์ชัน g

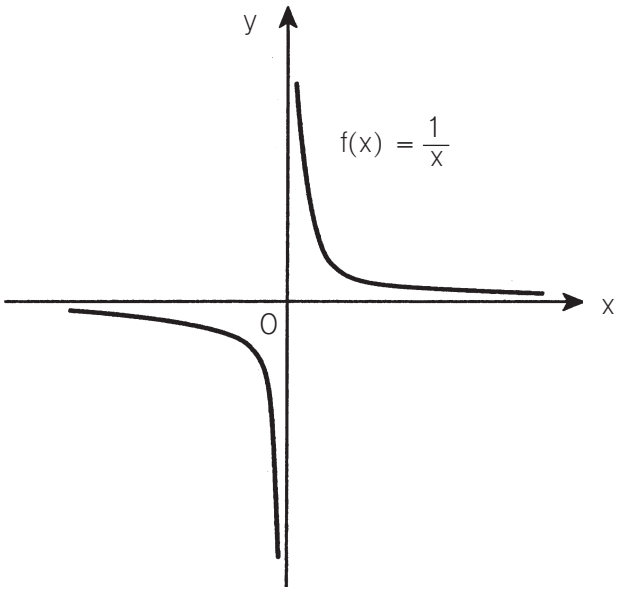


จะเห็นว่า $\lim_{x \to 0^-} g(x) = 1$ และ $\lim_{x \to 0^+} g(x) = 3$

เรากล่าวว่า $\lim g(x)$ ไม่มีค่า

โสตทัศน์ # 7.2 ลิมิตเกี่ยวกับอินฟินิตี

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน f ซึ่งกำหนดโดย $f(x) = \frac{1}{x}$



จากกราฟของฟังก์ชัน f จะเห็นได้โดยง่ายว่า

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

โสตทัศน์ # 7.3 กฎการหาลิมิต

กฎต่อไปนี้จะช่วยให้การหาลิมิตของฟังก์ชันทำได้ง่ายขึ้น

L – 1 $\lim_{x\to a} c = c$ (c เป็นค่าคงตัว)

L – 2 $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนบวก

L – 3 $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

L – 4 $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$

L – 5 $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

L – 6 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ เมื่อ $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

L – 7 $\lim_{x\to a} [f(x)]^r = [\lim_{x\to a} f(x)]^r$ เมื่อ r เป็นจำนวนจริงบวก

1. จงหาลิมิต $\lim_{x\to -2} (x^2 + 3x)$

2. จงหาลิมิต $\lim_{x\to 2} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

3. จงหาลิมิต $\lim_{x\to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4}$

โสตทัศน์ # 7.4 อนุพันธ์

เรียกลิมิต

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ว่า **อนุพันธ์ของ f** และแทนด้วยสัญลักษณ์ **$f'(x)$** หรือ $\frac{d}{dx}f(x)$

สูตรสำหรับการหาอนุพันธ์

D – 1 $\frac{d}{dx}(c) = 0$ (c เป็นค่าคงตัว)

D – 2 $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริงใด ๆ

D – 3 $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$

D – 4 $\frac{d}{dx}cf(x) = c\frac{d}{dx}f(x)$

1. กำหนดให้ $f(x) = x^4$ จงหา $f'(x)$ หรือ $\frac{df}{dx}$

2. กำหนดให้ $y = 3x^5 + 7$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ หรือ y'

3. กำหนดให้ $f(x) = 3 + 5x^2 - 7x^4$ จงหา $f'(x)$

4. กำหนดให้ $y = \sqrt{x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

5. กำหนดให้ $y = \frac{4}{x^2}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

6. กำหนดให้ $f(x) = 3x^5 - 2x^3$ จงหา $f'(x)$, $f'(1)$ และ $f'(3)$

โสตทัศน์ # 7.5 อนุพันธ์อันดับสูง

ในกรณีทั่วไปถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ กล่าวคือ $f'(x)$ หาค่าได้ และถ้า $f'(x)$ ก็เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ เราจะเรียกอนุพันธ์ของ $f'(x)$ ว่า**อนุพันธ์อันดับที่สอง**ของ $f(x)$ และจะเขียนแทนด้วย $f''(x)$ หรือ y'' หรือ $f^{(2)}(x)$ หรือ $\frac{d^2y}{dx^2}$

ในทำนองเดียวกัน **อนุพันธ์อันดับที่สาม**ของ $f(x)$ ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $f^{(3)}(x)$ หมายถึงอนุพันธ์ของ $f''(x)$ โดยการพิจารณาในทำนองเดียวกันนี้ต่อ ๆ ไป เราจะได้อนุพันธ์อันดับที่ n ของ $f(x)$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $f^{(n)}(x)$ หรือ $\frac{d^ny}{dx^n}$ ซึ่งเราหมายถึงอนุพันธ์ของ $f^{(n-1)}(x)$

จงหาอนุพันธ์อันดับที่สองของฟังก์ชัน $f(x) = 3x - 2x^3 + 5x^4$

โสตทัศน์ # 7.6 กฎลูกโซ่

D – 5 $$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

จากกฎลูกโซ่ทำให้เราได้สูตรที่สำคัญคือ

D – 6 $$\frac{d}{dx}(v^n) = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. จงหาอนุพันธ์ของ $y = (x + 2)^3$
2. จงหาอนุพันธ์ของ $y = (2x^2 - 3)^{12}$
3. กำหนดให้ $u(x) = \sqrt[3]{1 + x^2}$ จงหาอนุพันธ์ของ $u(x)$

โสตทัศน์ # 7.7 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปผลคูณ และผลหาร

D – 7 $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

D – 8 $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

จงหาอนุพันธ์ของ

1) $f(x) = x^3(2x-1)^5$

2) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

โสตทัศน์ # 7.8 อนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและอนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

D – 9 $\frac{d}{dx}\log_a v = \frac{1}{v\ln a}\frac{dv}{dx}$

D – 10 $\frac{d}{dx}\ln v = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$

D – 11 $\frac{d}{dx}\ln|v| = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$

D – 12 $\frac{d}{dx}a^v = a^v \ln a\frac{dv}{dx}$

D – 13 $\frac{d}{dx}e^v = e^v\frac{dv}{dx}$

D – 14 $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

1. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \ln 2x$

2. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \ln(1 + x^2)$

3. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = e^{x^2}$

4. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = 2^{3x^2 + x}$

โสตทัศน์ # 7.9 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

D – 15 $\frac{d}{dx}\sin u = \cos u \frac{du}{dx}$

D – 16 $\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$

D – 17 $\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$

D – 18 $\frac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$

D – 19 $\frac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$

D – 20 $\frac{d}{dx}\csc u = -\csc^2 u \cot u \frac{du}{dx}$

1. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \cos 2x - \sin 3x$

2. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \tan(x-3)^2$

3. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \sec x \tan x - \csc(x-1)$

โสตทัศน์ # 7.10 ความหมายทางเรขาคณิตของอนุพันธ์

ในทางเรขาคณิต **อนุพันธ์** $f'(x)$ หมายถึง **ความชัน** ของเส้นสัมผัสของกราฟของ

$y = f(x)$ ที่จุด $(x, f(x))$ ใด ๆ

โสตทัศน์ # 7.11 การตรวจสอบฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด ด้วยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

กฎสำหรับพิจารณาลักษณะ **เพิ่มขึ้น หรือลดลง** ของกราฟของฟังก์ชัน

สำหรับฟังก์ชัน f ซึ่งมีอนุพันธ์ที่ x จะได้ว่า

(1) ถ้า $f'(x) > 0$ แล้ว f **เพิ่มขึ้น**ที่ x

(2) ถ้า $f'(x) < 0$ แล้ว f **ลดลง**ที่ x

จงตรวจสอบว่า $f(x) = x^3 - 3x$ เพิ่มขึ้นหรือลดลงบนช่วงใด

โสตทัศน์ # 7.12 ความหมายเกี่ยวกับค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

ความหมายของ “ค่าสูงสุด” และ “ค่าต่ำสุด”

ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งหาค่าได้บนเซต S

(1) f จะมีค่าสูงสุดที่จุด x_0 ซึ่งอยู่ใน S เมื่อ $f(x_0) \geq f(x)$ สำหรับทุก ๆ x ซึ่งอยู่ในเซต S เรียก **$f(x_0)$ ว่าค่าสูงสุดของ f บน S**

(2) f จะมีค่าต่ำสุดที่จุด x_1 ซึ่งอยู่ใน S เมื่อ $f(x_1) \leq f(x)$ สำหรับทุก ๆ x ซึ่งอยู่ในเซต S เรียก **$f(x_1)$ ว่า ค่าต่ำสุดของ f บน S**

ความหมายของ “ค่าสูงสุดสัมพันธ์ และ “ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์”

(1) **f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่** x_0 ก็ต่อเมื่อมีช่วงในรูป $(x_0 - h, x_0 + h)$ ที่ทำให้ทุก ๆ x ในโดเมนของ f ที่อยู่ในช่วงนี้มีคุณสมบัติ **$f(x) \leq f(x_0)$**

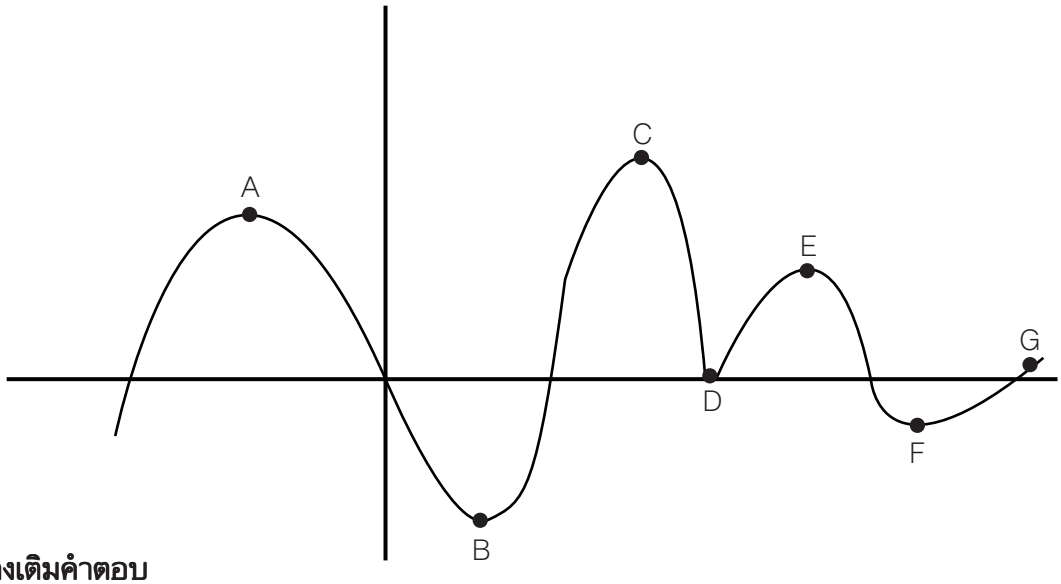
(2) **f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่** x_0 ก็ต่อเมื่อมีช่วงในรูป $(x_0 - h, x_0 + h)$ ที่ทำให้ทุก ๆ x ในโดเมนของ f ที่อยู่ในช่วงนี้มีคุณสมบัติ **$f(x_0) \leq f(x)$**

โสตทัศน์ # 7.13 ความหมายของค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

ความหมายของ “ค่าสูงสุดสัมบูรณ์” และ “ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์”

ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ คือ ค่าที่มากที่สุดในบรรดาค่าสูงสุดสัมพัทธ์

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ คือ ค่าต่ำสุดในบรรดาค่าต่ำสุดสัมพัทธ์



จงเติมคำตอบ

จุดต่ำสุดสัมพัทธ์คือ .....

จุดสูงสุดสัมพัทธ์คือ .....

จุดต่ำสุดสัมบูรณ์คือ .....

จุดสูงสุดสัมบูรณ์คือ .....

โสตทัศน์ # 7.14 หลักการหาค่าสูงสุด หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันด้วยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

หลักในการหาค่าสูงสุด และต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

(1) ถ้าฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด [a, b] แล้ว ย่อมได้ว่า ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดบนช่วงปิด [a, b]

(2) ถ้าฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์ที่ทุก ๆ จุดในช่วงเปิด (a, b) และมีค่าสูงสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ x_0 ซึ่งอยู่ในช่วงเปิด (a, b) แล้วย่อมได้ว่า $f'(x_0) = 0$

ค่าวิกฤต

ค่าของ x ซึ่ง $f'(x_0) = 0$ เมื่อ x เป็นจุดภายในโดเมนของฟังก์ชัน f ซึ่งไม่ใช่จุดปลายช่วง (ในกรณีที่โดเมนของฟังก์ชัน f เป็นช่วงปิด) เรียกค่า x ว่า**ค่าวิกฤต หรือจุดวิกฤตของฟังก์ชัน f**

โสตทัศน์ # 7.14 (ต่อ)

การตรวจสอบค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน ณ ค่าวิกฤติ

1. โดยการใช้อนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

ถ้า x_0 เป็นค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f และ

(1) ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายจากบวกเป็นลบ เมื่อ x มีค่าผ่าน x_0 จากน้อยไปมาก จะได้ว่า **f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ x_0**

(2) ถ้า $f'(x_0)$ เปลี่ยนเครื่องหมายจากลบเป็นบวก เมื่อ x มีค่าผ่าน x_0 จากน้อยไปมากจะได้ว่า **f มีค่าต่ำสุดสัมพันธ์ที่ x_0**

2. โดยการใช้อนุพันธ์อันดับที่สอง

ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์ในช่วง (a, b) และให้ x_0 เป็นจุดในช่วง (a, b) สมมติว่า $f'(x) = 0$

(1) ถ้า $f''(x_0) > 0$ แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ x_0

(2) ถ้า $f''(x_0) < 0$ แล้ว f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ x_0

ถ้า $f''(x_0) = 0$ กฎนี้จะใช้ไม่ได้ ให้ตรวจสอบโดยอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

จงหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชัน (ถ้ามี) ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = x^3 - 3x$
2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$
3. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

โสตทัศน์ # 7.15 สรุปหลักในการแก้ปัญหาโจทย์เรื่องค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

หลักการแก้ปัญหาโจทย์เรื่องค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

(1) ตรวจดูว่ามีปริมาณหรือตัวแปรค่าอะไรบ้างที่กล่าวถึง วาดรูปประกอบถ้าทำได้ แสดงรายละเอียดตลอดจนให้ตัวอักษร แทนค่าตัวแปรค่าต่าง ๆ

(2) เขียนฟังก์ชันที่โจทย์กำหนดให้ในเทอมของตัวแปรค่าต่าง ๆ และกำหนดขอบเขตของตัวแปรให้ได้จากเงื่อนไขของโจทย์

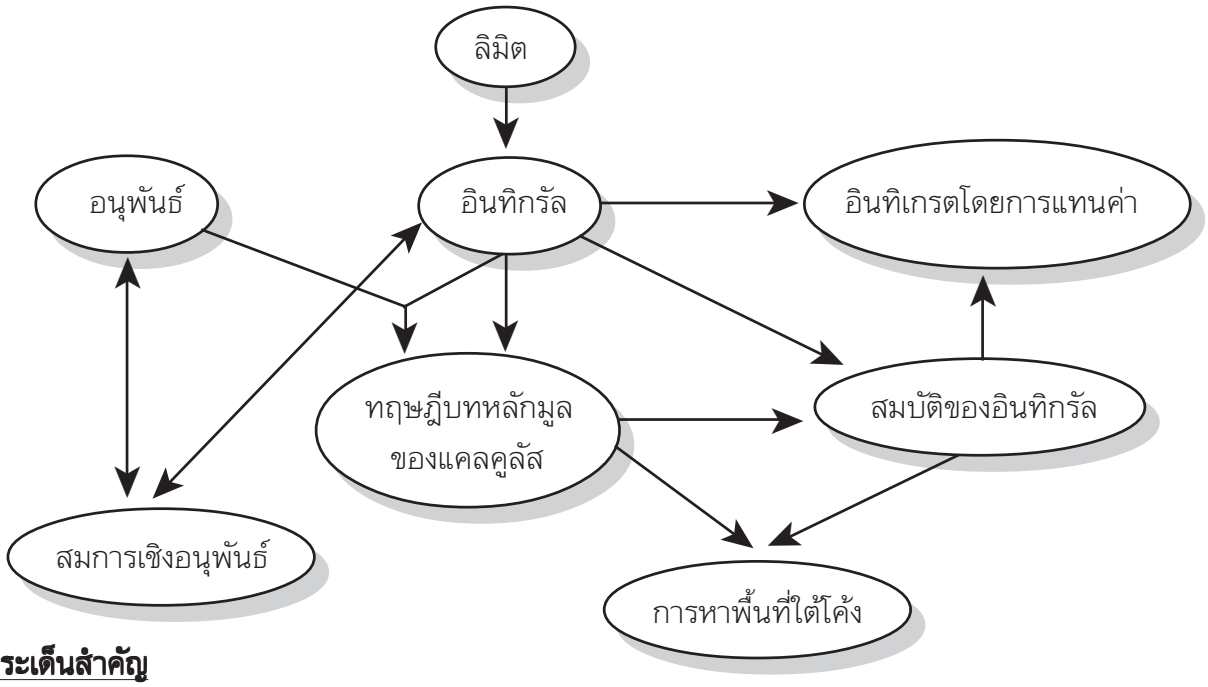
(3) ถ้าฟังก์ชันในข้อ 2 มีตัวแปรมากกว่าหนึ่ง ต้องหาความสัมพันธ์ของตัวแปรเหล่านี้ (จากโจทย์หรือจากเรขาคณิตหรือสูตรความจริงอื่น ๆ) ทำให้เหลือตัวแปรค่าเพียงตัวเดียว

(4) หาค่าวิกฤตของฟังก์ชัน

(5) ในการแก้ปัญหาโจทย์โดยมากไม่ต้องทดสอบค่าวิกฤต ใช้พิจารณาจากสามัญสำนึก อย่าลืมความจริงในทางปฏิบัติของค่าวิกฤตว่าเป็นไปได้หรือไม่

(6) ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดที่ต้องการมักจะเป็นค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ จึงควรจะตรวจสอบค่าที่ปลายช่วงด้วย

หน่วยที่ 8
อินทิกรัลและการประยุกต์

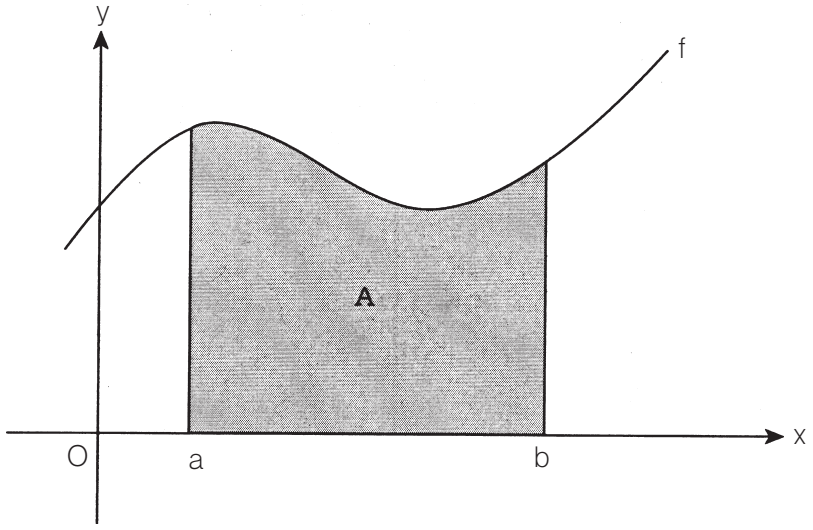


ประเด็นสำคัญ

1. หาอินทิกรัลของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
2. อินทิเกรตโดยการแทนค่าได้
3. หาพื้นที่ใต้โค้งของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
4. แก้สมการเชิงอนุพันธ์ได้ (ยังไม่มีในเอกสารการสอน)

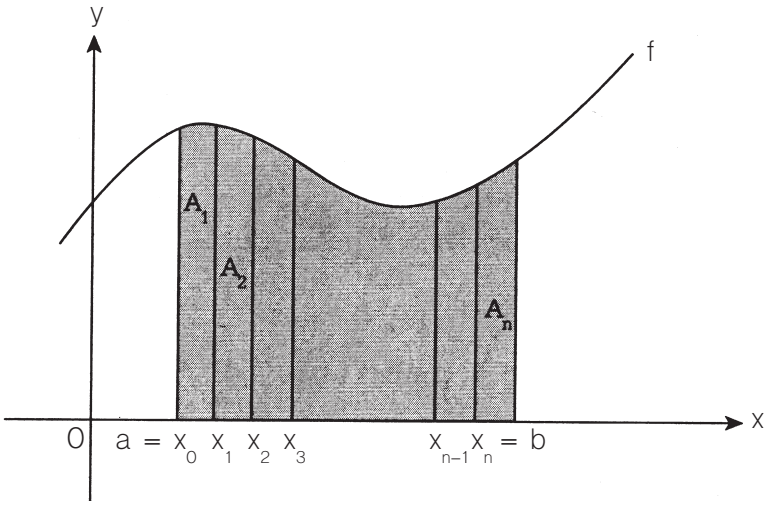
โสตทัศน์ # 8.1 อินทิกรัล

พิจารณาพื้นที่ A ในกราฟข้างล่างนี้



เราอาจประมาณค่าพื้นที่ A ได้โดยสร้างสี่เหลี่ยมผืนผ้า A_1, A_2,...., A_n

โสตทัศน์ # 8.2



ผลรวมของพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าเหล่านี้ ย่อมมีค่าใกล้เคียงพื้นที่ A
เราสามารถคำนวณค่าพื้นที่ A ได้โดยหาลิมิตของผลบวก กล่าวคือ

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

เราเรียกวิธีการคำนวณโดยการหาลิมิตของผลบวกตามวิธีที่กล่าวมาว่า **การอินทิเกรต** และเรียกค่าลิมิตที่คำนวณได้ว่า **อินทิกรัล** ของ f

ในกรณีทั่ว ๆ ไป

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด [a, b]
การแบ่งช่วงจาก a ถึง b ด้วยจุดแบ่ง $x_0, x_1, x_2,...,x_n$ ใด ๆ ในลักษณะที่

$$a = x_0 < x_1 < x_2 <...< x_n = b$$

และแต่ละช่วงย่อย $[x_{i-1}, x_i]$ มีขนาดลู่เข้าสู่ศูนย์เมื่อ n มีค่ามากขึ้น ให้ x_i^* เป็นจุดใด ๆ ในช่วง $[x_{i-1}, x_i]$, i = 1, 2, ..., n จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

มีค่าเดียวกันเสมอไม่ว่าจะเลือก x_i^* จากช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ อย่างไร เราเรียกค่าลิมิตนี้ว่า **อินทิกรัลของ f บนช่วง [a, b]** และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\int_a^b f \quad \text{หรือ} \quad \int_a^b f(x)dx$$

และเรียกวิธีการคำนวณหาค่าอินทิกรัลว่า **การอินทิเกรต**
เรียก a ว่า **ลิมิตล่างของการอินทิเกรต** และเรียก b ว่า **ลิมิตบนของการอินทิเกรต**

โสตทัศน์ # 8.3

เราอ่านสัญลักษณ์ $\int_a^b f(x)\,dx$ ว่า

"อินทิกรัลของ f บนช่วง [a, b]" หรือ
"อินทิกรัลของ f จาก a ถึง b" หรือ
"อินทิกรัล f จาก a ถึง b"

คำว่า "อินทิกรัล" เป็นคำกลาง ๆ ที่นักคณิตศาสตร์ใช้เรียกค่าที่ได้จากการคำนวณโดยการหาลิมิตของผลบวก อินทิกรัลอาจมีความหมายเป็นอะไรต่าง ๆ ได้หลายอย่าง สุดแต่ว่าเราจะนำไปใช้ในเรื่องใด เช่น อาจหมายถึง พื้นที่ ปริมาตร ความพอใจรวม ต้นทุนรวม รายรับรวม ฯลฯ ความคิดเรื่องอินทิกรัลจึงเป็นเรื่องที่มีประโยชน์ควรแก่การศึกษาเป็นอย่างยิ่งเรื่องหนึ่ง

โสตทัศน์ # 8.4 สมบัติของอินทิกรัล

สมบัติของอินทิกรัลที่สำคัญ ๆ ซึ่งเราจะนำไปใช้ช่วยในการคำนวณต่าง ๆ ได้แก่

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

   โดยที่ a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $c \in [a, b]$

2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

3. $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

4. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (k เป็นจำนวนจริงใด ๆ)

1. กำหนด $\int_{-1}^{2} f(x)dx = 5$, $\int_{-1}^{6} f(x)dx = 8$ จงหาค่าของ $\int_2^6 f(x)dx$

2. กำหนด $\int_1^3 f(x)dx = 5$ และ $\int_1^3 g(x)dx = 7$

จงหาค่าของ $\int_1^3 3f(x)dx$ และ $\int_1^3 [f(x) + g(x)]dx$

โสตทัศน์ # 8.5 ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

ในสัญลักษณ์สำหรับอินทิกรัล ถ้าเราแทนลิมิตบนด้วยตัวแปร x ค่าของอินทิกรัลก็จะแปรตามค่าตัวแปร x เราเรียกฟังก์ชันที่กำหนดค่าโดยวิธีนี้ว่า **อินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ f** เช่น

ถ้า

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

ฟังก์ชัน F จะเป็นอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ f

ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่หนึ่งของแคลคูลัส เป็นทฤษฎีบทที่ชี้ให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่าง “อินทิกรัล” และ “อนุพันธ์” ดังนี้

ถ้า F เป็นอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ f กล่าวคือ

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

เราจะได้ว่า

$$F'(x) = f(x)$$

ที่ทุก ๆ x ซึ่ง f มีความต่อเนื่อง

ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสบทที่สอง เป็นบทกลับของกันและกันกับทฤษฎีบทหลักมูลบทที่หนึ่ง สาระของทฤษฎีบทมูลบทที่สองมีดังนี้

ถ้า P เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด [a, b] และ $P'(x) = f(x)$ ที่ทุก ๆ x ในช่วงเปิด (a, b) เราจะได้ว่า

$$\int_a^b f(x)dx = P(b) - P(a)$$

เราเรียกฟังก์ชัน P ใด ๆ ที่มีสมบัติ

$$P'(x) = f(x)$$

บนช่วงเปิด (a, b) ว่า **ฟังก์ชันดั้งเดิม** (primitive function) หรือ **ปฏิยานุพันธ์** (antiderivative) ของ f บนช่วงเปิด (a, b)

ฟังก์ชันหนึ่ง ๆ มีฟังก์ชันดั้งเดิมได้หลายฟังก์ชัน เช่น

(i) $P(x) = \frac{x^3}{3} + 5$

(ii) $P(x) = \frac{x^3}{3} - \sqrt{12}$

(iii) $P(x) = \frac{x^3}{3} + c$ โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

โสตทัศน์ # 8.5 (ต่อ)

ฟังก์ชันเหล่านี้ล้วนเป็นฟังก์ชันดั้งเดิมของ $f(x) = x^2$ ทั้งสิ้น เราเรียกฟังก์ชันดั้งเดิมของ f ใด ๆ ที่กำหนดด้วยค่าคงตัวไม่เจาะจง (arbitary constant) ดังข้อ (iii) ว่า **ฟังก์ชันดั้งเดิมทั่วไป** (general primitive function)

จะเห็นได้ว่าการหาฟังก์ชันดั้งเดิมกับการอินทิเกรตเป็นเรื่องที่เกี่ยวข้องกันจนเสมือนจะเป็นเรื่องเดียวกัน จึงเรียกการหาฟังก์ชันดั้งเดิมว่าการอินทิเกรตด้วย นอกจากนั้นเรายังนิยมใช้สัญลักษณ์

$$\int f(x)dx$$

เขียนแทนฟังก์ชันดั้งเดิมทั่วไปของ f อีกด้วย เช่น ในกรณี

$$f(x) = x^2$$

เราจะได้ว่า

$$\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + c$$

เป็นต้น

I–1 $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ ; $n \neq 1$

เราอาจใช้สูตรนี้ในการหาฟังก์ชันดั้งเดิมทั่วไปของฟังก์ชันซึ่งมีค่าเขียนได้ในรูป x^n ตัวอย่างเช่น

1. $\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + c = \frac{x^3}{3} + c$

2. $\int x^5 dx =$ .....

3. $\int x^{-3} dx =$ .....

4. $\int \sqrt[3]{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx =$ .....

โสตทัศน์ # 8.6 สูตรอินทิเกรต lnx

อย่างไรก็ตาม สูตร I – 1 ข้างต้นนี้คงใช้ได้เฉพาะในกรณีที่ $n + 1 \neq 0$ หรือ $n \neq -1$
ในกรณีที่ $n = -1$ นั้น เราได้ทราบมาแล้วว่า

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

โสตทัศน์ # 8.7 สูตรอินทิเกรต x^n

$$I - 1' \qquad \int x^n \, dx = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} + c & \text{เมื่อ } n \neq -1 \\ \ln|x| + c & \text{เมื่อ } n = -1 \end{cases}$$

สำหรับกรณี $n = 0$ นั้น $x^n = x^0 = 1$ ก็คือฟังก์ชันคงตัว 1 ในกรณีนี้เราได้

$$\int dx = x + c, \text{ เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัวใด ๆ}$$

กฎเกณฑ์เบื้องต้นข้ออื่น ๆ สำหรับใช้ในการคำนวณหาฟังก์ชันดั้งเดิมทั่วไปมีดังนี้

I – 2 $\int(u(x) + v(x))dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx$

I – 3 $\int(u(x) - v(x))dx = \int u(x)dx - \int v(x)dx$

I – 4 $\int cu(x)dx = c\int u(x)dx$

จงหาฟังก์ชันดั้งเดิมทั่วไป $\int(2x - 5)dx$

จงหาฟังก์ชันดั้งเดิมทั่วไป $\int(2x^3 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2})dx$

จงหาค่าของ $\int_1^4 x\sqrt{x}\, dx$

โสตทัศน์ # 8.8 แสดงวิธีการอินทิเกรต

เพื่อให้การเขียนแสดงวิธีการอินทิเกรตเป็นไปอย่างกระทัดรัด เรานิยมใช้สัญลักษณ์

$$P(x)\Big|_a^b \quad \text{แทน} \quad P(b) - P(a)$$

จงหาค่าของอินทิกรัล $\int_1^2 (6x^2 - \frac{4}{x^3})\, dx$

โสตทัศน์ # 8.9 การอินทิเกรตโดยการแทนค่า

อาจจะเรียกว่า การอินทิเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปร

ให้ v เป็นฟังก์ชันของ x เนื่องจาก

$$d(\frac{v^{n+1}}{n+1} + c) = \frac{n+1}{n+1} v^n dv = v^n dv;\ n \neq -1$$

ดังนั้น

I – 5 $\int v^n\, dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ และ $n \neq -1$

1. จงอินทิเกรต $\int (x - 2)^4\, dx$

2. จงอินทิเกรต $\int \sqrt{x + 1}\, dx$

โสตทัศน์ # 8.10 ขั้นตอนของการอินทิเกรตโดยการแทนค่า

เรียกวิธีทำตามขั้นตอนต่อไปนี้ว่า **การอินทิเกรตโดยการแทนค่า** (integration by substitution)
ขั้นตอนของการอินทิเกรตตามวิธีนี้มีดังนี้

1. กำหนด v ในพจน์ของ x
2. หา dx ในพจน์ของ dv
3. แทน x, dx ให้เป็นพจน์ของ v, dv
4. หาฟังก์ชันดั้งเดิมในพจน์ของ v
5. แทน v ในผลลัพธ์ที่ได้จากข้อ 4 ด้วยสูตรที่กำหนดในข้อ 1 ให้ผลลัพธ์เขียนอยู่ในพจน์ของ x

จงหาฟังก์ชันดั้งเดิมทั่วไป $\int x\sqrt{x^2 + 3}dx$

จงหาฟังก์ชันดั้งเดิมทั่วไป $\int x^3\sqrt{x^2 + 5}dx$

จงหาค่าของ $\int_0^4 \sqrt{2x + dx}$

โสตทัศน์ # 8.11 การอินทิเกรตฟังก์ชันอดิศัย

เนื่องจาก $\frac{d}{dx}(e^x + c) = e^x$

ซึ่งแสดงว่า $e^x + c$ เป็นฟังก์ชันดั้งเดิมทั่วไปของ e^x ดังนั้นเราจึงได้สูตรสำหรับอินทิเกรต e^x เป็น

$$\int e^x dx = e^x + c \qquad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัวใด ๆ}$$

ให้ v เป็นฟังก์ชันของ x จากความรู้เรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย เราทราบว่า

$$\frac{d}{dv}(\ln|v| + c) = \frac{1}{v}$$

ซึ่งแสดงว่า

I – 6 $$\int \frac{1}{v} dv = \ln|v| + c \qquad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัวใด ๆ}$$

โสตทัศน์ # 8.11 (ต่อ)

ยิ่งไปกว่านั้น เนื่องจาก $\frac{d(a^v + c)}{dv} = a^v \ln a$ สำหรับ $a > 0$ ซึ่งแสดงว่า

I – 7	$\int a^v dv = \frac{a^v}{\ln a} + c$	สำหรับ $a > 0$	เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ในกรณีที่ $a = e$ จะได้ว่า $\ln a = \ln e = 1$ ดังนั้น

I – 8	$\int e^v dv = e^v + c$	เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

1. จงอินทิเกรต $\int \frac{2}{3x-5}\, dx$

2. จงอินทิเกรต $\int \frac{2x}{3x^2 + 5}\, dx$

3. จงอินทิเกรต $\int 5\left(2^{3x}\right) dx$

4. จงอินทิเกรต $\int e^{3x}\, dx$

5. จงอินทิเกรต $\int e^{-2x}\, dx$

โสตทัศน์ # 8.12 สูตร e^{ax}

1 – 8	$\int e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$	เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ	

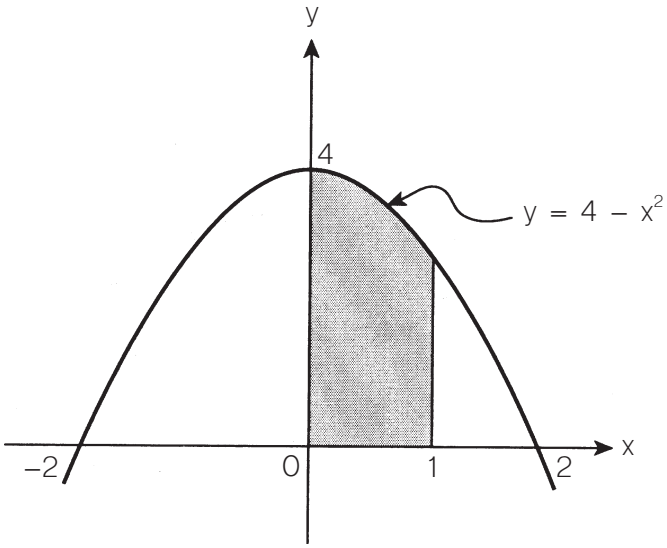
จงอินทิเกรต $\int (3e^{5x} + 4e^{-x}) dx$

โสตทัศน์ # 8.13 การประยุกต์ของอินทิกรัล

พื้นที่ใต้โค้ง

กำหนดให้ $y = 4 - x^2$

พื้นที่ใต้กราฟ y บนช่วง [0,1] เหนือแกน x คือ พื้นที่แรเงา

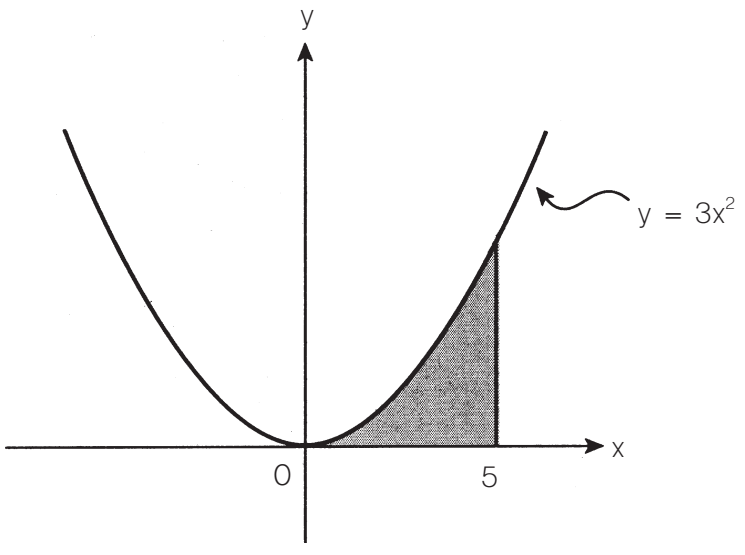


จากความรู้ในตอนที่ 13.1 เราทราบว่าพื้นที่ดังกล่าวมีค่าเท่ากับ

$$\int_0^1 (4 - x^2)dx = \frac{11}{3}$$

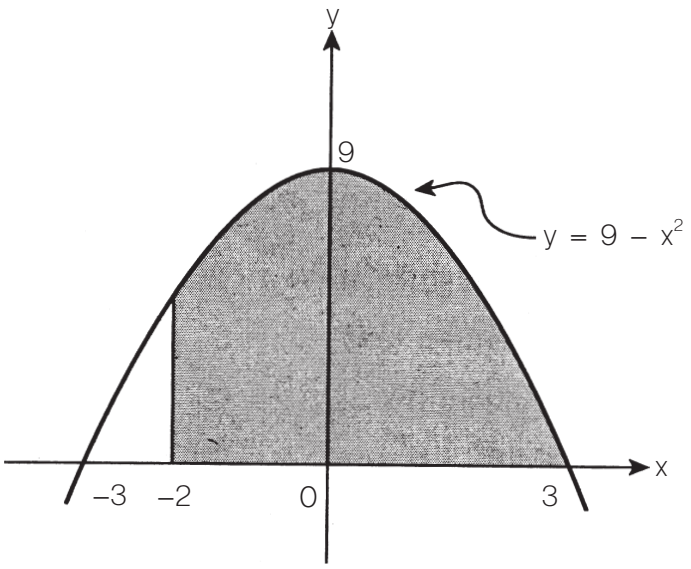
นั่นคือพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = 4 - x^2$, แกน x, เส้นตรง $x = 0$ (หรือ แกน y) และ เส้นตรง $x = 1$ มีค่าเท่ากับ $\frac{11}{3}$ ตารางหน่วย

1. จงหาพื้นที่อาณาบริเวณ A ที่แรเงาที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = 3x^2$, แกน y, แกน x และเส้นตรง $x = 5$



โสตทัศน์ # 8.13 (ต่อ)

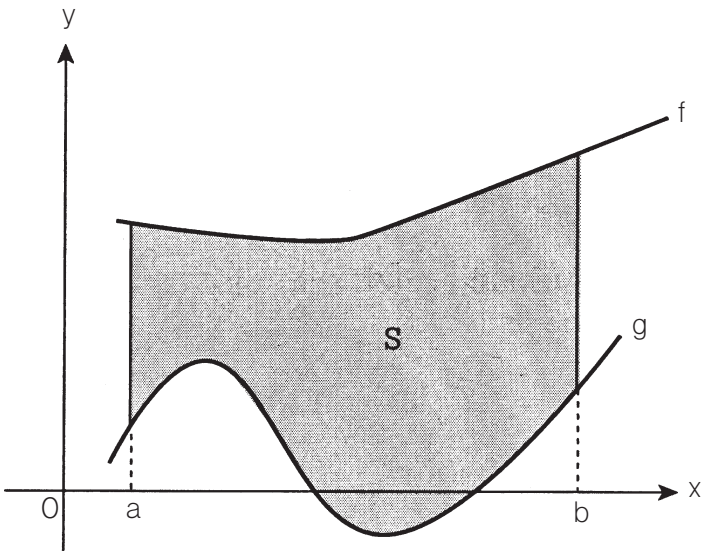
2. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณ S ที่แรเงาที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = 9 - x^2$, แกน x, และเส้นตรง $x = -2$



หมายเหตุ จุดตัด (–3, 0) และ (3, 0) เป็นจุดตัดของเส้นโค้ง $y = 9 - x^2$ และ $y = 0$ (หรือแกน x)

โสตทัศน์ # 8.14 พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [a, b] ซึ่ง $f(x) \geq g(x)$ ทุก ๆ x ใน [a, b] ดังแสดงในภาพที่



เราอาจคำนวณพื้นที่ S ที่อยู่ระหว่างกราฟของ f กับ g บนช่วง [a, b] ได้ โดยการพิจารณาในทำนองเดียวกันกับการคำนวณพื้นที่ระหว่างกราฟของ f กับแกน x ซึ่งจะได้ว่า

โสตทัศน์ # 8.14 (ต่อ)

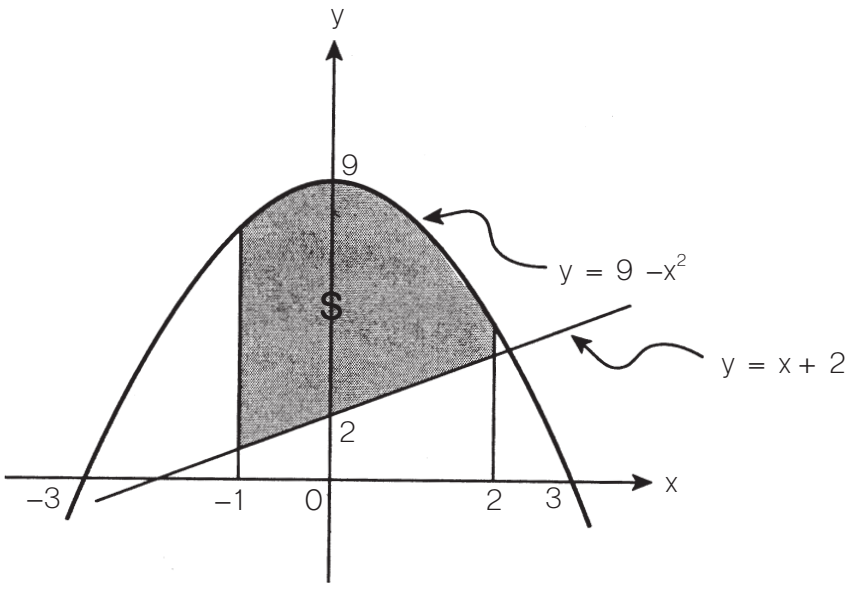
พื้นที่ระหว่างกราฟของ f กับกราฟของ g บนช่วง [a, b] $= \int_a^b [f(x)-g(x)]dx$

ข้อสังเกต ในกรณีที่ g(x) มีค่าเป็นศูนย์สำหรับทุก ๆ x กราฟของ g(x) ก็คือแกน x ในกรณีเช่นนี้พื้นที่ระหว่างกราฟของ f กับ g ก็คือพื้นที่ภายใต้กราฟของ f ที่อยู่เหนือช่วง [a, b] นั่นเอง การคำนวณหาพื้นที่ภายใต้กราฟของ f เหนือช่วง [a, b] ด้วยสูตรข้างบน จะให้ผลลัพธ์เป็น

พื้นที่ใต้กราฟ คือ $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b [f(x) - 0]dx$

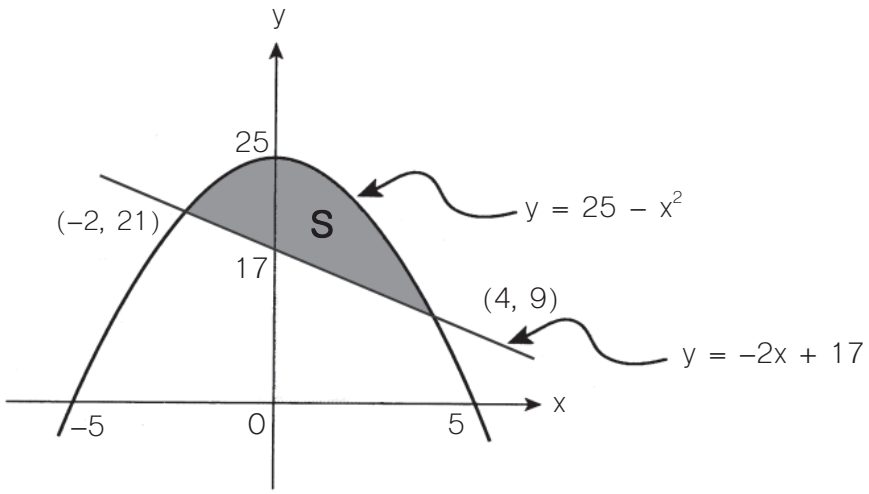
$= \int_a^b f(x)dx$

1. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณ S ที่แรเงาที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = 9 - x^2$, เส้นตรง $y = x + 2$, $x = -1$ และ $x = 2$



2. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณ S ที่แรเงาที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = 25 - x^2$ และเส้นตรง $y = -2x + 17$

โสตทัศน์ # 8.14 (ต่อ)



หมายเหตุ จุดตัด (–2, 21) และ (4, 9) เป็นจุดตัดของเส้นโค้ง $y = 25 - x^2$ และ $y = -2x + 17$

โสตทัศน์ # 8.15 สมการเชิงอนุพันธ์และคำตอบ

สมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation) คือสมการทางคณิตศาสตร์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันและอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น

ตัวอย่างเช่น

$$\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

และเรียก $y = f(x)$ ว่าเป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ เมื่อ y และอนุพันธ์ของ y สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้

ตัวอย่างเช่น

$y = Ce^{-3x}$ เมื่อ C คือค่าคงตัวใดๆ

เป็นคำตอบทั่วไปของสมการ $\frac{dy}{dx} + 3y = 0$

1. จงแสดงว่า $y = \frac{5x^2}{2} - 3x + C$ เป็นคำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} + 5x - 3$

2. จงแสดงว่า $y = Ce^{-5x}$ เป็นคำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = -5y$

โสตทัศน์ # 8.16 สมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกตัวแปร

จากสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

บางครั้งเราสามารถแยกตัวแปรของสมการได้ โดยให้ตัวแปรเดียวกันอยู่ด้วยกัน นั่นคือ พยายามจัดให้อยู่ในรูปของ

$$g(y)\, dy = h(x)\, dx$$

จากนั้นก็สามารถหาคำตอบโดยการอินทิเกรตทั้งสองข้าง

จงหาคำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{2y}$

2. $\frac{dy}{dx} = 2x^3y;\ y > 0$

โสตทัศน์ # 8.17 สมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้น

สมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้น (Linear Differential Equation) คือสมการเชิงอนุพันธ์ที่สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad \text{..... (1)}$$

เมื่อ P และ Q เป็นฟังก์ชั่นของ x เช่น $\frac{dy}{dx} - y = 2x$

และคำตอบทั่วไปของสมการ (1) คือ

$$y = \frac{1}{\rho}\int \rho Q(x)dx$$

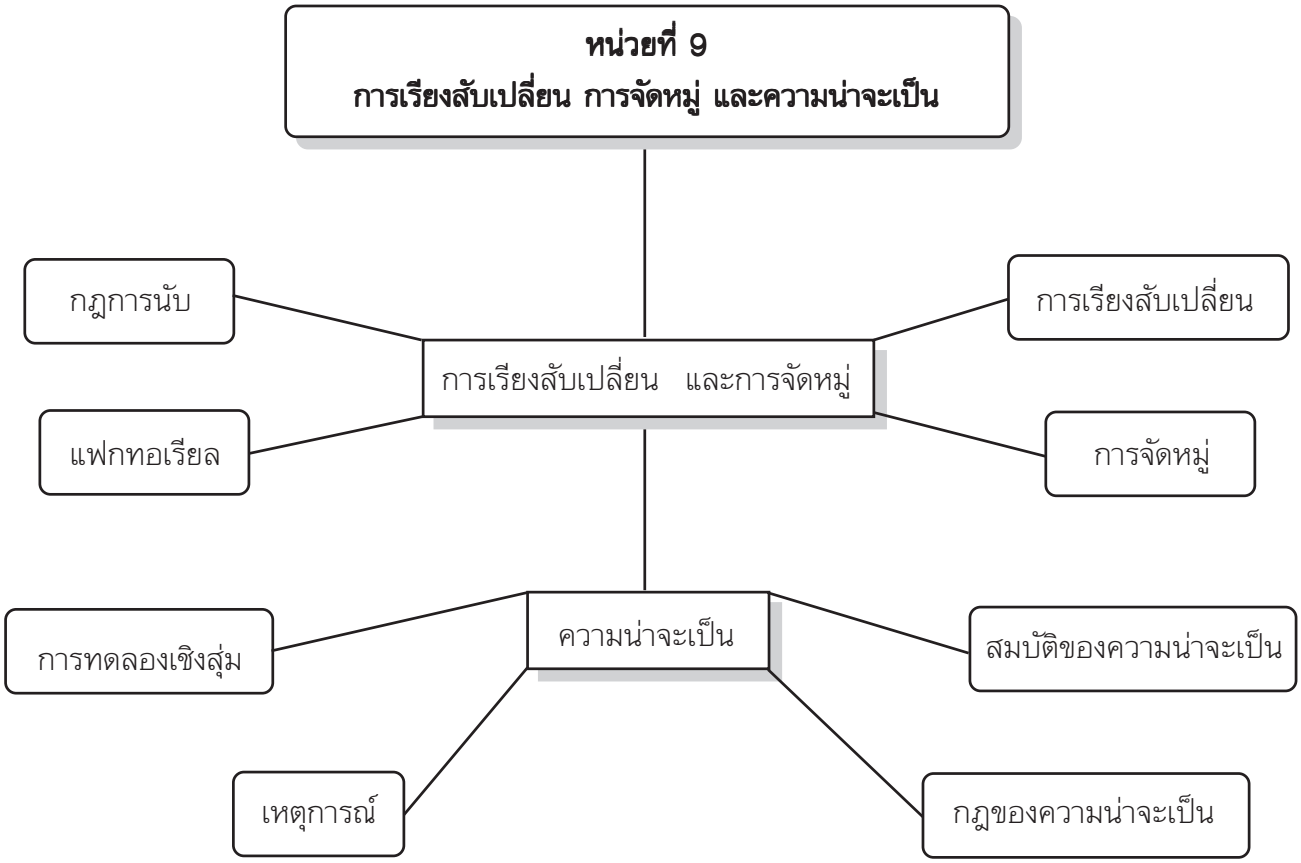
โดยที่ $\rho = e^{\int P(x)dx}$

และเรียก ρ ว่า ตัวประกอบเพื่ออินทิเกรต

จงหาคำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $\frac{dy}{dx} - e^x = 3y$

2. $x\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y;\ x > 0$


หน่วยที่ 9
การเรียงสับเปลี่ยน การจัดหมู่ และความน่าจะเป็น
กฎการนับ
การเรียงสับเปลี่ยน
การเรียงสับเปลี่ยน และการจัดหมู่
แฟกทอเรียล
การจัดหมู่
การทดลองเชิงสุ่ม
ความน่าจะเป็น
สมบัติของความน่าจะเป็น
เหตุการณ์
กฎของความน่าจะเป็น

โสตทัศน์ # 9.1 กฎการนับ

กฎการนับ เป็นกฎพื้นฐานที่นำมาใช้คำนวณวิธีในการเรียงสับเปลี่ยน ใช้หาจำนวนวิธีทั้งหมดในการดำเนินการอย่างหนึ่ง มี 2 หลักการคือ หลักการบวก และหลักการคูณ

กฎการนับโดยใช้หลักการบวก

> การดำเนินการอย่างหนึ่งประกอบด้วยวิธีเลือกทำได้หลายทาง โดยจะเลือกทำได้เพียงอย่างเดียวในทางเลือกนั้น ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดของดำเนินการนี้เท่ากับผลบวกของจำนวนวิธีในแต่ละทางเลือกนั้น

ตัวอย่างที่ 1 รัตนาสามารถเลือกเข้าอบรมในหลักสูตรของชมรมศิลปะ ชมรมดนตรี และชมรมการอาหาร แต่ละชมรมมีหลักสูตรให้เลือกอบรมได้ 4, 4 และ 5 หลักสูตรตามลำดับ ถ้ามีข้อกำหนดว่าผู้สนใจคนหนึ่งจะเลือกเข้าอบรมจากชมรมต่าง ๆ ได้เพียงหลักสูตรเดียวเท่านั้น รัตนาจะมีวิธีเลือกเข้าอบรมในหลักสูตรได้กี่วิธี

_____

_____

_____

กฎการนับโดยใช้หลักการคูณ

> การดำเนินการอย่างหนึ่ง ซึ่งประกอบด้วย 2 ขั้นตอนที่จะต้องทำต่อเนื่องกัน ในขั้นตอนแรกทำได้ r วิธี ขั้นตอนที่สองทำได้ k วิธี ดั้งนั้นจำนวนวิธีในการดำเนินการนี้ทั้งหมด r•k วิธี

ตัวอย่างที่ 2 การเดินทางจากกรุงเทพฯไปพระนครศรีอยุธยาทำได้ 3 วิธี คือ ทางรถยนต์ ทางรถไฟ และทางเรือ และการเดินทางจากพระนครศรีอยุธยาไปนครสวรรค์ทำได้ 2 วิธี คือ ทางรถยนต์ และทางรถไฟ ถ้านายสมคิดต้องการเดินทางจากกรุงเทพฯ ไปทำธุระที่พระนครศรีอยุธยาก่อนจึงเดินทางต่อไปนครสวรรค์ จะมีวิธีเดินทางทั้งหมดกี่วิธี

_____

_____

_____

จากแนวคิดของกฎการนับโดยใช้หลักการคูณดังกล่าวสามารถขยายไปสู่การหาจำนวนวิธีทั้งหมดของการดำเนินการที่มีขั้นตอน มากกว่า 2 ขั้นตอนได้ดังนี้

> กฎการนับโดยการคูณ การดำเนินการอย่างหนึ่งประกอบด้วยการกระทำหลายๆ อย่างต่อเนื่องกันทั้งหมด k ขั้นตอน ถ้าขั้นตอนแรกเลือกทำได้ n_1 วิธี และในแต่ละวิธีของขั้นตอนแรกเลือกทำในขั้นตอนที่สองได้ n_2 วิธี และในแต่ละวิธีของขั้นตอนที่สองเลือกทำในขั้นตอนที่สามได้ n_3 วิธี มีการกระทำต่อไปเรื่อยจนถึงขั้นตอนที่ k ซึ่งทำได้ n_k วิธี ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเลือกกระทำเท่ากับ $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ วิธี

โสตทัศน์ # 9.2 แฟกทอเรียล

แฟกทอเรียล ลักษณะผลคูณ 4x3x2x1 เป็นผลคูณของจำนวนเต็มบวก ที่ลดลงทีละหนึ่งจนถึง 1 เป็นลักษณะเฉพาะ เรียกวิธีการเขียนแบบนี้ว่า แฟคทอเรียล (Factorial) โดยใช้สัญลักษณ์ n!

ดังนั้น ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ สัญลักษณ์ n! อ่านว่า n แฟกทอเรียล หมายถึง ผลคูณของจำนวนเต็มตั้งแต่ n ถึง 1 นั่นคือ

$$n! = nx(n-1)x(n-2)x...x3x2x1$$

และกำหนดให้

$$0! = 1$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ 6!

โสตทัศน์ # 9.3 การเรียงสับเปลี่ยน

การเรียงสับเปลี่ยน (Permutation) เป็นการนำสิ่งของมาวางเรียงโดยคำนึงถึงลำดับ หรือตำแหน่งของสิ่งของเป็นสำคัญ

มีสิ่งของ n สิ่งแตกต่างกัน ถ้านำมาจัดเรียงคราวละ r สิ่ง โดยที่ $0 \leq r \leq n$

จะได้จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนที่แตกต่างกัน $\frac{n!}{(n-r)!}$ วิธี

เขียนด้วยสัญลักษณ์ ${}^{n}P_{r}$

ตัวอย่างที่ 4 ถ้ามีหนังสือที่แตกต่างกัน 5 เล่ม ต้องการนำมาจัดเรียงบนชั้น จะมีกี่วิธีในการเรียง โดยที่

1. วางเรียงไว้เพียง 3 เล่ม
2. วางเรียงทั้งหมด

โสตทัศน์ # 9.4 การเรียงสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด

ในการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งซึ่งมีของจำนวน n_1 เหมือนกันเป็นกลุ่มที่ 1 มีสิ่งของจำนวน n_2 สิ่งเหมือนกันเป็นกลุ่มที่ 2 ... มีสิ่งของ n_k สิ่งเหมือนกันเป็นกลุ่มที่ k โดยที่ $n_1 + n_2 + n_3 \ldots n_k = n$

จะได้จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของทั้งหมด $\dfrac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_k!}$ วิธี

ตัวอย่างที่ 5 อักษรคำว่า SESSION จะนำมาเรียงสับเปลี่ยนในแนวเส้นตรงได้กี่วิธี

โสตทัศน์ # 9.5 การจัดหมู่

การจัดหมู่ (Combination) คือ การเลือกสิ่งของ r สิ่ง จากของทั้งหมด n สิ่งที่แตกต่างกัน มาจัดเป็นหมู่ โดยไม่คำนึงถึงลำดับที่หรือตำแหน่งเป็นสำคัญ

การจัดหมู่สิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันโดยจัดครั้งละ r สิ่ง ($r \leq n$) จัดได้ $\dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ วิธี เขียนด้วยสัญลักษณ์ ${}^{n}C_{r}$ หรือ $\binom{n}{r}$

ตัวอย่างที่ 6 มีตัวแทนนักศึกษา 7 คน ต้องการเลือกมาเป็นกรรมการ 5 คน จะทำได้กี่วิธี

โสตทัศน์ # 9.5 (ต่อ)

การจัดหมู่สามารถประยุกต์ไปสู่การแบ่งสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด ออกเป็นหลาย ๆ กลุ่ม หรือหลาย ๆ หมู่ โดยไม่คำนึงถึงลำดับสิ่งของภายในแต่ละกลุ่มหรือหมู่เป็นสำคัญ โดยเราสามารถแบ่งสิ่งของในแต่ละกลุ่มให้มีจำนวนเท่ากันหรือไม่เท่ากันก็ได้

ในการแบ่งกลุ่มสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมดออกเป็น k กลุ่ม โดยให้กลุ่มที่ 1,2,3,...,k มีสิ่งของจำนวน n_1, n_2, n_3,... ,n_k สิ่งตามลำดับ โดย ที่ $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k = n$

จำนวนวิธีแบ่งกลุ่มดังกล่าวคือ $\dfrac{n!}{n_1!n_2!n_3!...n_k!}$

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\left(\dfrac{n}{n_1, n_2, n_3, ..., n_k}\right)$

โสตทัศน์ # 9.6 การทดลองเชิงสุ่ม ปริภูมิตัวอย่าง และเหตุการณ์

การทดลองเชิงสุ่ม (random experiment) คือ การกระทำที่ไม่อาจสามารถบอกผลลัพธ์ล่วงหน้าได้อย่างถูกต้อง แต่เราทราบว่ามีผลลัพธ์อะไรบ้าง

ปริภูมิตัวอย่าง (Sample space) คือ เซตของผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นได้จากการทดลองเชิงสุ่มนั้น

จุดตัวอย่าง (Sample point) คือ สมาชิกแต่ละตัวของปริภูมิตัวอย่าง

การทดลองเชิงสุ่ม เช่น การโยนเหรียญ การทอดลูกเต๋า การสุ่มจับสลาก เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 7 จงเขียนปริภูมิตัวอย่างและจุดตัวอย่างของการหยิบสลากหนึ่งใบที่มีหมายเลข 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, และ 9

โสตทัศน์ # 9.7 เหตุการณ์

เหตุการณ์ (event) คือสับเซตของปริภูมิตัวอย่างที่มีคุณสมบัติตามที่ระบุ

เหตุการณ์หนึ่งอาจจะประกอบด้วยจุดตัวอย่าง 1 จุด หรือมากกว่าก็ได้
เหตุการณ์ที่เป็นไปไม่ได้คือ เหตุการณ์ที่ไม่มีจุดตัวอย่างเลย ซึ่งเขียนแทนด้วยเซตว่าง ($\varnothing$)

ตัวอย่างที่ 8 จงเขียนเหตุการณ์ของการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูกที่ได้แต้มน้อยกว่า 5
วิธีทำ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ทอดลูกเต๋าหนึ่งลูกที่ได้แต้มน้อยกว่า 5

A = _ _ _ _ _ _

เราใช้เซตแทนเหตุการณ์ต่างๆ ดังนั้น เราสามารถนำการดำเนินการของเซตในรูปแบบต่าง ๆ เช่น ยูเนียน อินเตอร์เซคชัน และคอมพลีเมนต์ มาใช้ในการทำให้เกิดเหตุการณ์ใหม่ได้
ดังนั้น $A \cup B$ คือ การเกิดเหตุการณ์ A หรือ B
และ $A \cap B$ คือเหตุการณ์ที่ A เกิดขึ้นและ B เกิดขึ้น
A' คือ เหตุการณ์ที่ A ไม่ได้เกิดขึ้น

ตัวอย่างที่ 9 ในการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูก ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายแต้มคี่ ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มน้อยกว่า 5 จงเขียน $A \cup B$ และ $A \cap B$

$A \cup B$ = ...
$A \cap B$ = ...

โสตทัศน์ # 9.8 สมบัติของความน่าจะเป็น

$$\text{ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์} = \frac{\text{จำนวนสมาชิกที่เหตุการณ์นั้นเกิดขึ้น}}{\text{จำนวนสมาชิกในปริภูมิตัวอย่าง}}$$

ถ้าปริภูมิตัวอย่างของการทดลองเชิงสุ่มมีสมาชิก n(S) ตัว แต่ละตัวมีโอกาสมีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน และเหตุการณ์ A ที่เกิดจากการทดลองนี้ประกอบด้วยสมาชิก n(A) ตัว ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ A จะเกิดขึ้นแทนด้วย P(A) คือ

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

ความน่าจะเป็นจะมีค่าอยู่ระหว่างค่าใดบ้าง .....

โสตทัศน์ # 9.8 (ต่อ)

ตัวอย่างที่ 10 จงหาความน่าจะเป็นของการโยนเหรียญ 2 อันพร้อมกัน แล้วขึ้นหน้าก้อยอย่างน้อย 1 เหรียญ

วิธีทำ ให้ H แทนเหรียญหงายหน้าหัว และ T แทนเหรียญหงายหน้าก้อย

S = _ _ _ _ _ _

A เหตุการณ์ที่เหรียญหงายหน้าก้อยอย่างน้อย 1 เหรียญ ดังนั้น A = _ _ _ _ _ _

P(A) = _ _ _ _ _ _

สมบัติความน่าจะเป็น

ถ้า A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ในการทดลองเชิงสุ่ม ซึ่งมีปริภูมิตัวอย่าง S

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(S) = 1$

ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ในการทดลองเชิงสุ่ม ซึ่งมีปริภูมิตัวอย่าง S

3. $P(A \cup B) = P(A)+P(B)$ เมื่อ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

ตัวอย่างที่ 11 กล่องใบหนึ่งบรรจุสลากหมายเลข 3, 5 และ 7 อย่างละหนึ่งใบ ถ้าสุ่มหยิบสลากจากกล่องครั้งละ 2 ใบพร้อม ๆ กัน โดยไม่คำนึงถึงลำดับก่อนหลัง จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

ก. ผลรวมของสลากทั้งสองใบเป็นเลขคี่

ข. ผลรวมของสลากทั้งสองใบมีค่าเป็น 10

ค. ผลรวมของสลากทั้งสองใบมีค่าตั้งแต่ 8 ถึง 12

วิธีทำ ให้ S ของการสุ่มหยิบสลากทั้งสองใบ

S = {3 กับ 5, 5 กับ 7, 3 กับ 7}, n(S) = 3

ก. ให้ A เป็นผลรวมของสลากทั้งสองใบเป็นเลขคี่

———————————————————————————————

———————————————————————————————

ข. ให้ B เป็นผลรวมของสลากทั้งสองใบเท่ากับ 10

———————————————————————————————

———————————————————————————————

ค. ให้ C ผลรวมของสลากทั้งสองใบมีค่าตั้งแต่ 8 ถึง 12

———————————————————————————————

———————————————————————————————

โสตทัศน์ # 9.9 กฎความน่าจะเป็น

กฎการบวก (Addition Rule)

1.1 กฎการบวกของเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน คือ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

1.2 กฎการบวกของเหตุการณ์ที่เกิดร่วมกันได้ คือ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ตัวอย่างที่ 12 ในการโยนลูกเต๋าสองลูกพร้อมกันหนึ่งครั้ง โดยลูกเต๋าลูกหนึ่งสีขาว อีกลูกสีดำ จงหาความน่าจะเป็นที่ผลรวมแต้มบนลูกเต๋าน้อยกว่า 4 หรือผลรวมแต้มบนลูกเต๋ามากกว่า 7

กฎของเหตุการณ์ประกอบ (Rule of complementary event)

ถ้า A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ A' คือเหตุการณ์ประกอบของ A หรือ เป็นเหตุการณ์ที่ A ไม่เกิดขึ้น นั่นคือ

$$P(A') = 1 - P(A)$$

หรือ $$P(A) = 1 - P(A')$$

ตัวอย่างที่ 13 ในการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูก จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่อไปนี้

1. หงายแต้ม 4
2. หงายแต้มไม่ใช่แต้ม 4

โสตทัศน์ # 9.10 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional Probability) คือ การหาค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใด เหตุการณ์หนึ่งซึ่งขึ้นอยู่กับอีกเหตุการณ์หนึ่งที่ได้เกิดไปขึ้นแล้ว เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ P(B/A)

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \; ; \; P(A) \neq 0$$

ตัวอย่างที่ 14 ในการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูก 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าขึ้นแต้มมากกว่า 4 แต้ม เมื่อทราบแล้วว่าลูกเต๋าขึ้นแต้มคู่

กฎการคูณ (Multiple Rule)

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

ตัวอย่างที่ 15 ในการหยิบไพ่ 2 ใบอย่างสุ่มจากสำรับทีละใบ ถ้าหยิบใบแรกแล้วไม่ใส่คืน หยิบใบที่สองจากที่เหลือ จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบไพ่ทั้งสองใบได้โพแดง

โสตทัศน์ # 9.11 เหตุการณ์อิสระ

เหตุการณ์ A และ B เป็นอิสระต่อกัน
ก็ต่อเมื่อ $P(B/A) = P(B)$ และ $P(A/B) = P(A)$
จะได้ว่า $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

ตัวอย่างที่ 16 ถุงใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 3 ลูก สีดำ 7 ลูก ถ้าหยิบอย่างสุ่มทีละลูกโดยไม่ใส่คืนถุงก่อนหยิบครั้งต่อไป จงหาความน่าจะเป็น

ก. ได้สีแดงทั้ง 2 ครั้ง

ข. ครั้งแรกหยิบได้สีแดง ครั้งที่สองหยิบได้สีดำ

กิจกรรม

1. ในช่วงวันหยุดสงกรานต์ บริษัททท่องเที่ยวสามบริษัท ได้เสนอโปรแกรมนำเที่ยวแก่ผู้สนใจ ดังนี้ บริษัทนครพิงค์เสนอ 3 โปรแกรม บริษัททท่องทั่วไทย เสนอ 4 โปรแกรม และบริษัทอันดามันเสนอ 3 โปรแกรมถ้าท่านสนใจจะไปท่องเที่ยวกับโปรแกรมของบริษัททั้งสามนี้ โดยเลือกเพียง 1 โปรแกรม ท่านจะมีวิธีเลือกได้กี่วิธี

2. ถ้านำอักษร 3 ตัวของคำว่า BRAND มาเรียงเป็นคำใหม่ โดยไม่สนใจว่าจะมีความหมายหรือไม่ จะมีกี่วิธีในการจัดเรียงคำต่าง ๆ กัน

3. ถุงใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 4 ลูก ลูกบอลสีขาว 3 ลูก จะมีกี่วิธีที่จะหยิบลูกบอลจากถุง 3 ลูก โดยให้มีลูกบอลสีแดง 2 ลูก และลูกบอลสีขาว 1 ลูก

4. ในการทอดลูกเต๋าที่เที่ยงตรง 2 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่ผลรวมของแต้มบนลูกเต๋าทั้งสองลูกมีค่ามากกว่า 3

5. ในการเลือกตั้งผู้แทนราษฎร์ครั้งหนึ่ง พบว่าความน่าจะเป็นที่ผู้ชายที่มีภรรยาแล้วจะไปลงคะแนนเลือกตั้งเท่ากับ 0.45 สำหรับผู้หญิงที่มีสามีแล้ว ความน่าจะเป็นที่ลงคะแนนเลือกตั้ง 0.30 แต่ถ้าทราบว่าสามีจะไปลงคะแนนความน่าจะเป็นก็จะเพิ่มเป็น 0.70 จงหาความน่าจะเป็นที่สามีภรรยาคู่หนึ่งจะลงคะแนนเสียงเลือกตั้งทั้งคู่

โสตทัศน์ # 10.1 ความหมายของสถิติ

สถิติมีความหมายหลายนัยดังนี้

1) ข้อมูลสถิติ 2) ระเบียบวิธีทางสถิติ 3) ค่าสถิติ และ 4) สถิติศาสตร์

สถิติมีความสำคัญต่อการดำเนินชีวิตประจำวันของบุคคลโดยทั่วไปอย่างกว้างขวางทุกวงการในหลายระดับ

โสตทัศน์ # 10.2 ประเภทของสถิติ

สถิติแบ่งเป็น2 ประเภท คือ สถิติพรรณนา (Descriptive Statistics) และสถิติอนุมาน (Inferential Statistics)

1. สถิตพรรณนา (Descriptive Statistics)

สถิติพรรณนาเป็นระเบียบวิธีทางสถิติที่ใช้ในการบรรยายหรือสรุปลักษณะข้อมูลของเรื่องที่สนใจหรือตัวแปรที่ศึกษาจากกลุ่มตัวอย่างหรือประชากร เพื่อช่วยให้ทำความเข้าใจกับข้อมูลที่เก็บรวบรวมมาได้ง่ายและสะดวก ผลที่ได้จากการศึกษาใช้เฉพาะกลุ่ม

2. สถิติอนุมาน (Inferential Statistics)

สถิติอนุมานเป็นระเบียบวิธีทางสถิติที่ศึกษาข้อมูลจากกลุ่มตัวอย่าง (sample) เพื่อสรุปอ้างอิงไปยังลักษณะของประชากร (population)

โสตทัศน์ # 10.3 ระเบียบวิธีทางสถิติ

ระเบียบวิธีทางสถิติประกอบด้วยขั้นตอนที่สำคัญดังนี้

1. การเก็บรวบรวมข้อมูล
2. การนำเสนอข้อมูล
3. การวิเคราะห์ข้อมูล
4. การแปลความหมายข้อมูล

โสตทัศน์ # 10.4 ข้อมูล

ข้อมูล (data) หมายถึง ข้อเท็จจริงของสิ่งที่สนใจหรือตัวแปรที่ต้องการศึกษา เช่น รายได้ อายุ วุฒิการศึกษา ความสนใจ คุณภาพของสินค้า ประสิทธิภาพของเครื่องจักรกล เป็นต้น

ข้อมูลมีหลายประเภทขึ้นอยู่กับเกณฑ์ที่ใช้ในการแบ่ง

1. แบ่งตามลักษณะข้อมูล
    1. ข้อมูลเชิงคุณภาพ (qualitative data)
    2. ข้อมูลเชิงปริมาณ (quantitative data)

2. แบ่งตามมาตรการวัด
    1. ข้อมูลมาตราตามบัญญัติ (Nominal Scale)
    2. ข้อมูลมาตราเรียงลำดับ (Ordinal Scale)
    3. ข้อมูลมาตราอันตรภาค (Interval Scale)
    4. ข้อมูลมาตราอัตราส่วน (Ratio Scale)

3. แบ่งตามความต่อเนื่องของข้อมูล
    1. ข้อมูลต่อเนื่อง (continuous data)
    2. ข้อมูลไม่ต่อเนื่อง (discrete data)

4. แบ่งตามแหล่งข้อมูล
    1. ข้อมูลปฐมภูมิ (primary data)
    2. ข้อมูลทุติยภูมิ (secondary data)

โสตทัศน์ # 10.5 การนำเสนอข้อมูล

การนำเสนอข้อมูลเป็นวิธีการจัดการให้ข้อมูลอยู่ในรูปแบบที่ทำความเข้าใจได้ง่าย กะทัดรัด หรือสะดวกต่อการนำไปวิเคราะห์เพื่อศึกษาในประเด็นที่สนใจต่อไป การนำเสนอข้อมูลทำได้หลายวิธี เช่น การนำเสนอข้อมูลในรูปข้อความ ข้อความกึ่งตาราง ตาราง แผนภูมิ กราฟ เป็นต้น

โสตทัศน์ # 10.6 การแจกแจงความถี่

การแจกแจงความถี่

1. การแจกแจงความถี่แบบไม่แบ่งกลุ่มข้อมูล (ungrouped data)
2. การแจกแจงความถี่แบบกลุ่มกลุ่มข้อมูล (grouped data)

เช่น

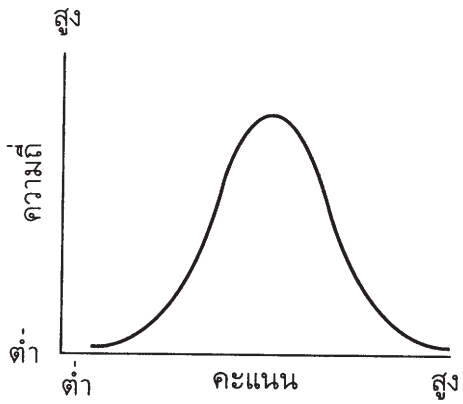
ตาราง 10.6 การแจกแจงความถี่ของอายุพนักงานในศูนย์บริการข้อมูลสถิติทางระบบเครือข่ายอินเทอร์เน็ตของหน่วยงานหนึ่ง

อายุพนักงาน	ขีดจำกัดที่แท้จริง	รอยขีด	ความถี่
30 – 32	29.5 – 32.5	IIIII	5
33 – 35	32.5 – 35.5	IIIII I	6
36 – 38	35.5 – 38.5	IIIII IIIII	10
39 – 4	38.5 – 41.5	IIIII IIIII IIIII	15
42– 44	41.5 – 44.5	IIIII IIIII II	12
45 – 47	44.5 – 47.5	IIIII IIIII	10
48 – 50	47.5 – 50.5	II	2
		รวม	60

โสตทัศน์ # 10.7 โค้งความถี่

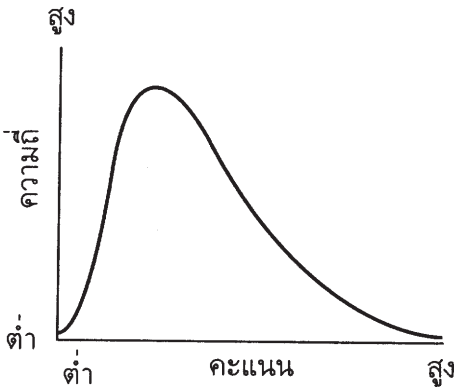
โค้งความถี่อาจมีรูปร่างแตกต่างกันไปตามลักษณะการแจกแจงของข้อมูล แต่โค้งความถี่ที่พบบ่อยมีดังนี้

โค้งปกติ (normal curve)

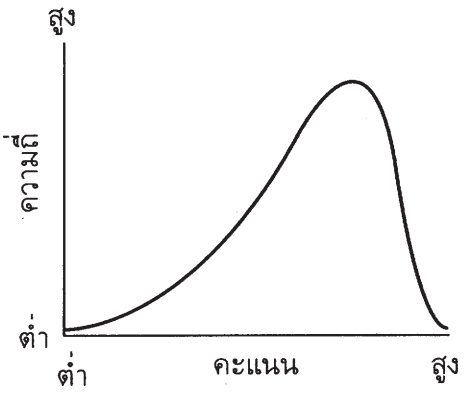


โค้งเบ้ (skewed curve)

โค้งเบ้ขวา



โค้งเบ้ซ้าย



โสตทัศน์ # 10.8 การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง

การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง

การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง เป็นการหาค่าค่าหนึ่ง เรียกว่า “ค่ากลาง” เพื่อเป็นตัวแทนของข้อมูลชุดนั้น ค่ากลางที่นิยมใช้คือ ค่าเฉลี่ย มัธยฐาน และฐานนิยม

ค่าเฉลี่ย คือผลบวกของค่าของข้อมูลชุดนั้นหารด้วยจำนวนข้อมูลทั้งหมด

มัธยฐาน คือค่าที่อยู่ตรงกลาง เมื่อเรียงลำดับข้อมูลจากมากไปน้อยหรือจากน้อยไปมาก

ฐานนิยม คือข้อมูลตัวที่ปรากฏบ่อยที่สุดหรือข้อมูลตัวที่มีความถี่สูงที่สุด

โสตทัศน์ # 10.9 การหาค่าเฉลี่ยกรณีข้อมูลไม่แจกแจงความถี่

การหาค่าเฉลี่ย

ค่าเฉลี่ย เป็นการวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางที่ใช้กับข้อมูลที่วัดในมาตราอันตรภาค หรือสูงกว่า การคำนวณค่าเฉลี่ยแบ่งออกเป็น 2 กรณี คือ กรณีข้อมูลไม่แจกแจงความถี่ และกรณีข้อมูลแจกแจงความถี่

1. กรณีข้อมูลไม่แจกแจงความถี่ ค่าเฉลี่ยคำนวณได้จากสูตร

$$\mu = \frac{\sum x}{N}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

เมื่อ $\bar{x}$ แทนค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง

μ แทนค่าเฉลี่ยของประชากร

N แทนจำนวนข้อมูลในประชากร

n แทนจำนวนข้อมูลในกลุ่มตัวอย่าง

x_i คือข้อมูลตัวที่ i

อายุของนักศึกษาสาขาวิชาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีที่สุ่มมา 10 คน เป็นดังนี้ (หน่วยเป็นปี)

27 28 31 30 48 32 23 23 28 37

จงหาค่าเฉลี่ย

โสตทัศน์ # 10.10 การหาค่าเฉลี่ยกรณีข้อมูลแจกแจงความถี่

2. กรณีข้อมูลแจกแจงความถี่ ค่าเฉลี่ยคำนวณได้จากสูตร

$$\mu = \frac{\sum fx}{N}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{n}$$

เมื่อ f แทน ความถี่

x แทน ข้อมูลแต่ละตัว กรณีข้อมูลไม่จัดหมู่ หรือ จุดกลางชั้น กรณีข้อมูลจัดหมู่

โรงพิมพ์ชาวไทย มีพนักงาน 30 คน มีประสบการณ์การทำงานในโรงพิมพ์แห่งนี้ ดังตาราง จงหาประสบการณ์การทำงานเฉลี่ยของพนักงานของโรงพิมพ์แห่งนี้

ประสบการณ์การทำงาน (ปี)	ความถี่
1 – 3	5
4 – 6	5
7 – 9	8
10 – 12	9
13 – 15	3
	N = 30

โสตทัศน์ # 10.11 การหาค่าเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนัก

การคำนวณค่าเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนัก

ในกรณีที่ค่าของข้อมูลขึ้นอยู่กับระดับความสำคัญด้วย เราจึงต้องถ่วงน้ำหนัก (Weight) ค่าของข้อมูลตามความสำคัญ ค่าเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนักจะมีสูตร ดังนี้

$$\bar{x} = \frac{\sum wx}{\sum w}$$

เมื่อ x แทนค่าของข้อมูล

w แทนน้ำหนัก ของค่าของข้อมูลตัวนั้น

โสตทัศน์ # 10.11 (ต่อ)

ในการเรียนการสอนวิชาสถิติมีข้อตกลงร่วมกันว่าจะมีการสอบ 3 ครั้ง แต่ละครั้งให้น้ำหนักเป็น 20%, 30% และ 50% ตามลำดับ นายกำชัยสอบสามครั้งได้คะแนน 85 90 และ 75 ตามลำดับ คะแนนเฉลี่ยของนายกำชัยเป็นเท่าไร

โสตทัศน์ # 10.12 การหามัธยฐานกรณีข้อมูลไม่แจกแจงความถี่

การหามัธยฐาน

มัธยฐานเป็นการวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางที่ใช้กับข้อมูลที่วัดในมาตราอันตรภาค หรือสูงกว่าที่มีการแจกแจงเบ้ซ้ายหรือเบ้ขวา การคำนวณมัธยฐานแบ่งออกเป็น 2 กรณี คือ กรณีข้อมูลไม่แจกแจงความถี่ และกรณีข้อมูลแจกแจงความถี่

1. กรณีข้อมูลไม่แจกแจงความถี่

ขั้นตอนการหาค่ามัธยฐาน ดำเนินการ ดังนี้

1. เรียงลำดับข้อมูลชุดนั้นจากมากไปหาน้อย หรือจากน้อยไปหามาก
2. คำนวณตำแหน่งของมัธยฐาน จากสูตร

$$\text{ตำแหน่งมัธยฐาน(กรณีประชากร)} = \frac{N + 1}{2}$$

$$\text{ตำแหน่งมัธยฐาน(กรณีกลุ่มตัวอย่าง)} = \frac{n + 1}{2}$$

เมื่อ N แทน จำนวนข้อมูลในประชากร
n แทน จำนวนข้อมูลกลุ่มตัวอย่าง

ดังนั้น มัธยฐานจะเป็นไปตามกรณีใดกรณีหนึ่ง ดังนี้

2.1 ถ้าข้อมูลชุดนั้นมีจำนวนคี่ มัธยฐานคือข้อมูลตัวที่อยู่ตรงกลาง

ถ้าข้อมูลชุดนั้นมีจำนวนคู่ มัธยฐานคือค่าเฉลี่ยของข้อมูลคู่ที่อยู่ตรงกลาง

อายุของนักศึกษาสาขาวิชาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีที่สุ่มมา 10 คน เป็นดังนี้ (หน่วยเป็นปี)

27 28 31 30 48 32 23 23 28 37

จงหามัธยฐานของอายุนักศึกษา

โสตทัศน์ # 10.13 การหามัธยฐานกรณีข้อมูลแจกแจงความถี่

2. กรณีข้อมูลแจกแจงความถี่

เราสามารถหามัธฐานได้จากสูตร ดังนี้

$$Mdn = L_o + \frac{i\left(\frac{N}{2} - F_b\right)}{f_{mdn}}$$ กรณีประชากร

$$Mdn = L_o + \frac{i\left(\frac{n}{2} - F_b\right)}{f_{mdn}}$$ กรณีกลุ่มตัวอย่าง

เมื่อ n และ N แทนขนาดของกลุ่มตัวอย่าง หรือขนาดของประชากร

i แทนขนาดของอันตรภาคชั้น

L_0 แทนขีดจำกัดล่างที่แท้จริงของชั้นที่มัธยฐานอยู่

F_b แทนความถี่สะสมก่อนถึงชั้นที่มัธยฐานอยู่

f_{mdn} แทนความถี่ของชั้นที่มัธยฐานอยู่

ชั้นที่มัธยฐานอยู่คือชั้นที่มีความถี่สะสมมากกว่าหรือเท่ากับ $\frac{n}{2}$ หรือ $\frac{N}{2}$ เป็นชั้นแรก

จากการสุ่มจับความเร็วของรถยนต์บนทางด่วนขณะฝนตกหนักได้ผลดังตาราง (หน่วยเป็นกิโลเมตร/ชั่วโมง) จงคำนวณมัธยฐาน

ความเร็ว	ความถี่
42 – 45	25
46 – 49	14
50 – 53	7
54 – 57	3
58 – 61	1

โสตทัศน์ # 10.14 การหาฐานนิยมกรณีข้อมูลไม่แจกแจงความถี่

การหาฐานนิยม

ฐานนิยม เป็นการวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางที่ใช้กับข้อมูลที่วัดในมาตรานามบัญญัติ หรือสูงกว่า

1. กรณีข้อมูลไม่แจกแจงความถี่ ฐานนิยมคือข้อมูลตัวที่ปรากฏบ่อยที่สุด

Mo แทน ฐานนิยม

จงหาฐานนิยมของข้อมูลต่อไปนี้

1. นักเรียนในห้อง 8 คน สวมเสื้อเบอร์ S S M L L L S S
2. นักศึกษา 10 คน สอบวิชา 96102 ได้ระดับคะแนน U U S S S S U S H H
3. จำนวนอุบัติเหตุในรอบ 6 วัน 5 7 4 7 6 9 ครั้ง
4. อายุของคนกลุ่มหนึ่งมีดังนี้ 42 38 39 45 50 ปี
5. คะแนนวิชาภาษาไทยของนักเรียน 94 84 74 90 98 92 80 90 80 98 78 98 คะแนน

โสตทัศน์ # 10.15 การหาฐานนิยม กรณีข้อมูลแจกแจงความถี่

2. กรณีข้อมูลแจกแจงความถี่ ฐานนิยมคำนวณได้จากสูตร

$$Mo = L_o + i\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right)$$

L_0 คือ ขีดจำกัดล่างที่แท้จริงของชั้นที่มีฐานนิยมอยู่

Δ_1 คือ ผลต่างของความถี่ระหว่างชั้นที่มีฐานนิยมอยู่กับชั้นที่อยู่ติดกันแต่ช่วงข้อมูลมีค่าต่ำกว่า

Δ_2 คือ ผลต่างของความถี่ระหว่างชั้นที่มีฐานนิยมอยู่กับชั้นที่อยู่ติดกัน แต่ช่วงข้อมูลมีค่าสูงกว่า

i คือ ขนาดของอันตรภาคชั้น

ฐานนิยมอยู่ในชั้นที่มีความถี่สูงสุด

จงหาฐานนิยมของประสบการณ์การทำงานของพนักงานในโรงพิมพ์ชาวไทย

	ประสบการณ์การทำงาน (ปี)	ขีดจำกัดที่แท้จริง	ความถี่ (f)
	1 – 3	0.5 – 3.5	5
	4 – 6	3.5 – 6.5	5
	7 – 9	6.5 – 9.5	8
ชั้นที่ฐานนิยมอยู่ →	10 – 12	9.5 – 12.5	9
	13 – 15	12.5 – 15.5	3

โสตทัศน์ # 10.16 การวัดการกระจาย

การวัดการกระจาย

การวัดการกระจาย เป็นการหาค่าเพื่อบอกว่าข้อมูลชุดนั้นมีความแตกต่างกันมากน้อยเพียงใด การวัดการกระจายที่ใช้บ่อยคือ พิสัย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และความแปรปรวน

พิสัย คือ ผลต่างระหว่างข้อมูลตัวที่มีค่าสูงสุดกับข้อมูลตัวที่มีค่าต่ำสุด

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เป็นการวัดการกระจายรอบค่าเฉลี่ย เป็นค่าเฉลี่ยของการกระจายของข้อมูลจากค่าเฉลี่ยของข้อมูลชุดนั้น

ความแปรปรวน คือกำลังสองของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

สูตรการคำนวณส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็นดังนี้

ลักษณะของข้อมูล	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง
1. ไม่แจกแจงความถี่	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum\left(x-\mu\right)^2}{N}}$	$s = \sqrt{\frac{\sum\left(x-\bar{x}\right)^2}{n-1}}$
	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum\left(x^2\right)}{N} - \left(\frac{\sum x}{N}\right)^2}$	$s = \sqrt{\frac{n\sum\left(x^2\right)-\left(\sum x\right)^2}{n\left(n-1\right)}}$
2. แจกแจงความถี่	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum\left(fx^2\right)}{N} - \left(\frac{\sum fx}{N}\right)^2}$	$s = \sqrt{\frac{n\sum\left(fx^2\right)-\left(\sum fx\right)^2}{n\left(n-1\right)}}$

จงหาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และความแปรปรวนของประสบการณ์การทำงานของพนักงาน 30 คน ในโสตทัศน์ 10.15

โสตทัศน์ # 10.17 สัมประสิทธิ์ของความแปรผัน

สัมประสิทธิ์ของการแปรผัน (coefficient of variation)

ในกรณีที่ต้องการเปรียบเทียบการกระจายของข้อมูลตั้งแต่สองชุดที่มีค่าเฉลี่ยไม่เท่ากัน หรือมีหน่วยต่างกัน สามารถทำได้โดยการเทียบอัตราส่วนของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานโดยกำหนดให้ค่าเฉลี่ยเป็น 100 เรียกว่าสัมประสิทธิ์ของการแปรผัน (coefficient of variation) สามารถเขียนเป็นสูตรได้ดังนี้

$$\text{สัมประสิทธิ์ของการแปรผัน (C.V.)} = \frac{\text{ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน}}{\text{ค่าเฉลี่ย}} \times 100$$

ในการตรวจชีพจรและความดันโลหิตของคนงานชายในโรงงานผลิตชิ้นส่วนคอมพิวเตอร์แห่งหนึ่งได้ผลดังนี้

	ค่าเฉลี่ย	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
ชีพจร	80 ครั้ง/นาที	12.1 ครั้ง/นาที
ความดันโลหิต	115 มิลลิเมตรปรอท	15.2 มิลลิเมตรปรอท

จงเปรียบเทียบการกระจายของข้อมูลของชีพจรและความดันโลหิต

โสตทัศน์ # 10.18

กิจกรรม

1. อุณหภูมิสูงสุดของที่จังหวัดภูเก็ตระหว่างวันที่ 11–17 เมษายน (หน่วยเป็นองศาเซลเซียส)

   36 39 40 39 34 33 38

   จงหาค่าเฉลี่ย มัธยฐาน ฐานนิยม พิสัย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และความแปรปรวน

2. คะแนนสอบวิชาสถิติเบื้องต้นของนักศึกษาที่สุ่มมา 100 คน จากนักศึกษาทั้งหมด 456 คน เป็นดังตารางต่อไปนี้

คะแนน	ความถี่
10 – 14	10
15 – 19	20
20 – 24	35
25 – 29	22
30 – 34	13

จงหาค่าเฉลี่ย มัธยฐาน ฐานนิยม ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และความแปรปรวน

โสตทัศน์ # 10.18 คะแนนมาตรฐาน

คะแนนมาตรฐาน

คะแนนมาตรฐาน หรือคะแนน Z เป็นจำนวนที่แสดงว่าค่าของข้อมูลสูงหรือต่ำกว่าค่าเฉลี่ยเป็นกี่เท่าของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

การแปลงคะแนนดิบเป็นคะแนมาตรฐานเขียนเป็นสูตรได้ดังนี้

คะแนนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง

$$Z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

คะแนนมาตรฐานของประชากร

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

เมื่อ x คือ ค่าของข้อมูลดิบ

$\bar{x}, \mu$ คือ ค่าเฉลี่ยของข้อมูล

s, σ คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

เมื่อนำข้อมูลดิบทุกตัวมาแปลงเป็นค่ามาตรฐาน Z แล้วหาค่าเฉลี่ย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานจะได้ค่าเฉลี่ยเป็น 0 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 1

ประโยชน์ของคะแนนมาตรฐาน

1. ใช้ตัดสินว่าข้อมูลตัวใดตัวหนึ่งของข้อมูลชุดหนึ่งมีค่าได้มาตรฐานตามที่กำหนดไว้หรือไม่
2. ใช้เพื่อเปรียบเทียบว่า ข้อมูลซึ่งอยู่ต่างชุดกัน ตัวใดมีตำแหน่งดีกว่ากันเมื่อเปรียบเทียบกับกลุ่มของข้อมูลชุดนั้นๆ โดยข้อมูลทั้งสองชุดมีการแจกแจงปกติ
3. ใช้เปิดตารางพื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐานเพื่อหาว่ามีร้อยละเท่าไรของข้อมูลตกอยู่ในช่วงคะแนนมาตรฐานที่กำหนด เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงแบบปกติ